Муниципальное общеобразовательное учреждение
многопрофильная гимназия № 12
города Твери

Кафедра физико-математического и информационно-технологического образования.

«Согласовано»	«Согласовано»	«Утверждаю»
Руководитель кафедры /М.Н.Березина/	**Заместитель директора гимназии** _ _ /О.Н. Андреева/	**Директор МОУ гимназии № 12** /Т.В. Слесарева/
Протокол № 6 от «25» июня 2021 г.	**«25» июня 2021 г.**	**Приказ № 200 от 5.08.2021** МОУ гимназия № 12 г. Твери

Программа элективного курса по математике

«Избранные вопросы математики. Нестандартные задачи» 10-11 класс (по 68 часов)

на 2021 – 2022 учебный год

Составители: Андреева Г.Н.,
Сурова Ж.Ю.

Тверь
2021 год

Пояснительная записка

(по 68 часов в 10 и 11 классах из расчета 2 часа в неделю, всего 136 часов)

Предлагаемый элективный курс предназначен для учащихся 10-11 классов общеобразовательного профиля. Курс опирается на знания и умения, полученные учащимися при изучении алгебры основной школы. Тематика курса составлена с таким расчетом, чтобы систематизировать и обобщить полученные на уроках знания учащихся, одновременно расширяя и углубляя их, а также рассмотреть некоторые вопросы, изучение которых не предусмотрено школьной программой.

Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач, требующих применения высокой логической и операционной культуры, развивающих научно-теоретическое и алгоритмическое мышление учащихся. Тематика задач не выходит за рамки курса образовательного стандарта, но уровень их трудности - повышенный, превышающий обязательный.

Особенности курса: приоритет развивающей функции обучения над информационной, усиление практической значимости изучаемого материала, широкие возможности для реализации уровневой дифференциации в обучении. Значительное место в учебном процессе отведено самостоятельной математической деятельности учащихся, учитывающей мыслительные особенности данного возраста.

Программа данного курса предусматривает:

- формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету;
- развитие математических способностей;
- повышение уровня обученности учащихся;
- подготовку учащихся к сдаче ЕГЭ, ЦТ.

Тематика программы обеспечивает:

- интеллектуальное развитие учащихся;
- формирование математического мышления;
- формирование представлений об идеях и методах математики;
- развитие познавательной активности учащихся и творческого подхода к решению математических задач;
- формирование потребности к самообразованию и способности к адаптации в изменившемся обществе.

Цель курса:

- создание условий для внутрипрофильной специализации обучения и построения индивидуальных образовательных траекторий;
- обеспечение сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования;
- систематизация и обобщение опорных знаний учащихся по математике;
- подготовка учащихся к ЕГЭ по математике;
- развитие логического и творческого мышления.

Задачи курса:

- формирование умений и навыков комплексного осмысления знаний;
- подготовка к успешной сдаче ЕГЭ по математике.

Достижению целей служат специально подобранные задачи. На занятиях рассматриваются такие задачи, решение которых не требует дополнительных знаний, но эти знания используются в новых нетривиальных ситуациях.

Занятия построены по схеме «Ключевая задача + упражнения». Разбор ключевых задач, в ходе совместной деятельности учителя с учащимися, позволяет обеспечить «ориентировку» в материале. Для отработки практических навыков используются долгосрочные домашние задания. В качестве контроля - релейные контрольные задания.

Структура материала курса такова, что учащиеся имеют возможность решать задачи теми способами и средствами, которыми к этому времени располагают в результате изучения материала основного курса. Многие задания допускают несколько способов решений, которые рассматриваются и разбираются на занятиях. Предпочтение отдается наиболее доступным, рациональным способам, которые помогут учащимся «набить руку» в практике решения разнообразных задач.

Ведущими **методами** преподавания являются метод проблемных задач, самостоятельная работа учащихся с различными источниками информации.

Формы учебных занятий:

- уроки решения ключевых задач;
- практикумы;
- консультации;
- зачетные занятия.

В работе с учащимися на занятиях применяются:

- блочно - модульный подход в преподавании математики;
- принцип дифференциации и индивидуализации;
- разноуровневый дидактический материал;

В качестве контроля - релейные контрольные работы, самостоятельные работы.

Ожидаемый результат: При реализации данного курса результативность будет определяться количеством и качеством самостоятельно решенных учебных задач уровня возможностей (то есть задач так называемой «конкурсной математики», требующих знания специальных эффективных приемов решения), а также решения задач ЕГЭ части В и С.

Содержание и организация процесса обучения

Тематическое планирование построено в соответствии с содержательными линиями разделов, объединяющими связанные между собой вопросы. Эти вопросы могут рассматриваться как в 10-м, так и в 11-м классах, повторяя и дополняя друг друга.

Примерное планирование спецкурса

№ п/п	Содержание материала	Кол-во часов	Форма контроля
	10 класс	**68ч**	
1	Уравнения высших степеней	26	зачет
2	Уравнения и неравенства с модулем	24	зачет
3	Системы уравнений	18	зачет
	11 класс	**68ч**	
4	Иррациональные уравнения и неравенства	12	зачет
5	Задания с параметром	22	
6	Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств	16	сам работа
7	Итоговое повторение.	18	итог работа

10 класс

Глава 1. Уравнения высших степеней (26 часов)

Многочлены. Деление многочлена.

Теорема Безу. Схема Горнера.

Введение новой переменной.

Возвратные уравнения.

Однородные уравнения.

Выделение полного квадрата.

Метод неопределенных коэффициентов.

Дробно- рациональные уравнении.

Неравенства. Метод интервалов.

Уравнения и неравенства с двумя переменными.

Глава 2. Уравнения и неравенства с модулем. (24 часа)

Уравнения вида: $|f(x)| = g(x); |f(x)| = |g(x)|$;

Неравенства вида: $|f(x)| \le g(x); |f(x)| \ge g(x); |f(x)| \le |g(x)|$;

Уравнения и неравенства с несколькими модулями;

Уравнения и неравенства, содержащие модуль в модуле,

Уравнения и неравенства, решаемые заменой переменной;

Построение графиков функций, содержащих модуль (метод симметрии)

Метод областей.

Глава 3. Системы уравнений (18 часов)

Системы, решаемые подстановкой,

Алгебраическим сложением,

Умножением и делением,

Введением новой переменной;

Симметрические системы;

Применение однородных уравнений к решению систем;

Системы трех уравнений с тремя неизвестными: линейные и нелинейные.

11 класс

Глава 4. Иррациональные уравнения и неравенства (12 часов)

Уравнения вида: $\sqrt{f(x)} = \varphi(x); \sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}; g(x) \cdot \sqrt{f(x)} = 0; \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{\varphi(x)} = g(x)$ $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{g(x)}; \sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{\varphi(x)} = g(x)$;

Неравенства вида: $\sqrt{f(x)} \le \varphi(x)$; $\sqrt{f(x)} \ge \varphi(x); \sqrt{f(x)} \le (\ge) \sqrt{\varphi(x)}$;

Уравнения и неравенства, решаемые введением новой переменной,

Приведением к квадрату двучлена под знаком радикала;

Умножением на сопряженное;

Применение однородных уравнений;

Использование свойств, входящих под знак радикала функций.

Глава 5. Задания с параметром (22 часа)

Линейное уравнение с параметром

Дробно-рациональные уравнения с параметром. Уравнения с заданными условиями.

Квадратные уравнения с параметром. Квадратные уравнения с заданными условиями.

Линейные неравенства с параметром.

Квадратные неравенства с параметром. Метод интервалов при решении неравенств с параметром.

Уравнения и неравенства с параметром, содержащие переменную под знаком модуля.

Графический метод при решении линейных уравнений и неравенств с параметром.

Глава 6. Применение свойств функции к решению уравнений (16 часов)

Сравнение областей определения.

Сравнение областей значений.

Применение четности.

Симметричность функций.

Применение монотонности

Глава 7. Итоговое повторение (18 часов)

Числа и тождественные преобразования.

Производная и ее применение.

Первообразная и ее применение.

Уравнения высших степеней, системы уравнений, неравенства.

Уравнения и неравенства с модулем, системы уравнений и неравенств.

Иррациональные уравнения, системы уравнений, неравенства.

Тригонометрические уравнения, неравенства, системы уравнений.

Показательные уравнения, системы уравнений, неравенства.

Логарифмические уравнения, системы уравнений, неравенства.

Требования к результатам обучения

В результате изучения курса учащиеся должны овладеть следующими знаниями, умениями и навыками:

- знание математических определений и теорем, предусмотренных программой;
- умение точно и сжато выразить математическую мысль в письменном изложении, используя соответствующую символику;
- уверенное владение математическими умениями и навыками решения математических задач;
- свободно решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства, системы уравнений (включая алгебраические, показательные, логарифмические и тригонометрические выражения);

Преобразовывать тригонометрические выражения и решать тригонометрические уравнения;

Решать тригонометрические неравенства;

Применять свойства многочленов к решению задач;

Делить многочлен на многочлен с остатком и без остатка, используя теорему Безу;

Использовать схему Горнера;

Решать системы линейных уравнений (методами Гаусса, Крамера);

Решать нелинейные алгебраические системы уравнений;

Решать однородные, симметрические, возвратные уравнения;

Решать иррациональные уравнения, системы уравнений;

Решать дробно- линейные, квадратные и иррациональные неравенства;

Решать уравнения, системы уравнений, неравенства с модулем;

Решать уравнения и неравенства с двумя переменными;

Строить графики функций, содержащих модуль;

Использовать метод областей;

Решать уравнения и неравенства: линейные, дробно- рациональные, квадратные с параметром аналитически и графически;

Применять свойства функций при решении уравнений;

Решать комбинированные уравнения и неравенства.

Инструментарий контроля

Зачетная работа по теме «Уравнения высших степеней»

$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ $(x+3)(x+4)(x+5)(x+7)=-16$ 1. $(x^2-3x+1)^2+3(x-1)(x^2-3x+1)=4(x-1)^2$ $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ $(x+5)^4+(x+3)^4=16$	$\frac{x^4}{(2x+3)^2}-\frac{2x^2}{2x+3}+1=0$ $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$ 2. $(2x-1)(x-2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$ $(x-6)^4+(x-4)^4=82$ $x^4-2x^3-13x^2-2x+1=0$

$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}2{,}9$ $\left(x^2+x+1\right)^2-3x^2-3x-1=0$ 3. $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{x-3}{x+3}-\frac{x-4}{x+4}$ $x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$ $\frac{2x}{x^2-2x+5}+\frac{3x}{x^2+2x+5}=\frac{7}{8}$	$\frac{x^4}{(2x+3)^2}-\frac{2x^2}{2x+3}+1=0$ $\left(8x^2-3x+1\right)^2=32x^2-12x+1$ 4. $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$ $(x+3)(x+4)(x+5)(x+7)=-16$ $3x^2+5x+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=16$
$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ $x(x+3)(x+5)(x+8)=100$ 5. $\left(x^2-x\right)^4-5\left(x^2-x\right)^2x^2+6x^4=0$ $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$ $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$	$\frac{x^4}{(2x+3)^2}-\frac{2x^2}{2x+3}+1=0$ $(x+3)(x+4)(x+5)(x+7)=-16$ 6. $\frac{2x}{x^2-2x+5}+\frac{3x}{x^2+2x+5}=\frac{7}{8}$ $x^4-2x^3-13x^2-2x+1=0$ $\left(x^2-3x+1\right)^2+3(x-1)\left(x^2-3x+1\right)=4(x-1)^2$
$\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x+1}=2{,}9$ $\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$ 7. $(x-6)^4+(x-4)^4=82$ $(2x-1)(x-2)\left(2x^2+7x+2\right)=-20x^2$ $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$	$\frac{x^4}{(2x+3)^2}-\frac{2x^2}{2x+3}+1=0$ $x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$ 8. $(x+5)^4+(x+3)^4=16$ $\left(x^2+x+1\right)^2-3x^2-3x-1=0$ $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$

Ответы к зачетной работе по теме «Уравнения высших степеней»

$\frac{1}{2};2$ $-4\pm\sqrt{5}$ 1. $2\pm\sqrt{2};\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ $\frac{1}{2};2$ $-5;3$	$-1;3$ $-4;2$ 2. $-2;\frac{-1}{2}$ $3;7$ $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}4\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$
$\frac{1}{2};2$ $-1;0;\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$ 3. $-\frac{5}{2};0$ $-1;-3;3\pm\sqrt{6}$ $1;5$	$-1;3$ $0;\frac{3}{8};\frac{3\pm\sqrt{73}}{16}$ 4. $-3\pm\sqrt{3};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $-4\pm\sqrt{5}$ $1;\frac{-11\pm\sqrt{85}}{6}$

$\frac{1}{2};2$ $-4\pm\sqrt{21}$ 5. $0;1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{3}$ $-\frac{1}{2};-\frac{7}{2}$ $\frac{1}{2};2$	$-1;3$ $-4\pm\sqrt{5}$ 6. $1;5$ $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2};\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ $2\pm\sqrt{2};\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$
$\frac{1}{2};2$ $-4;2$ 7. $3;7$ $-2;-\frac{1}{2}$ $1;\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	$-1;3$ $-1;-3;3\pm\sqrt{6};$ 8. $-5;-3$ $-1;0;\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$ $-3\pm\sqrt{3};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Зачетная работа по теме «Уравнения и неравенства с модулем»

$\lvert x^2-x-1\rvert=1$ $(x+2)^2=2\lvert x+2\rvert+3$ $\lvert x-2\rvert-3\lvert 3-x\rvert+x=0$ $\lvert x^2+5x\rvert<6$ $\lvert 3x-5\rvert>9x+1$	$\lvert x^2-4x\rvert=4$ $x\lvert x\rvert+8x-7=0$ $\lvert x^2-9\rvert+\lvert x-3\rvert=6$ $2\lvert x+1\rvert\geq x-1$ $x^2-x-2<\lvert 5x-3\rvert$	$\lvert x^2+x-1\rvert=2x-1$ $\lvert x\rvert-2\lvert x+1\rvert+3\lvert x+2\rvert=0$ $\lvert x^2-4x\rvert=4$ $\lvert x+2\rvert<\lvert x-2\rvert$ $\lvert x+1\rvert-\lvert x-1\rvert>1$	$\lvert x+3\rvert=x^2+x-6$ $\lvert x-2\rvert x-6x+8=0$ $\lvert x-2\rvert-3\lvert 3-x\rvert+x=0$ $\lvert x^2-3x\rvert\geq x+5$ $\lvert x^2+5x\rvert<6$
$\lvert x\rvert+\lvert 3x+2\rvert+\lvert 2x-1\rvert=5$ $\lvert 3x-1\rvert=\frac{1}{4x-1}$ $\lvert x^2-4x\rvert=4$ $\lvert x+1\rvert-\lvert x-1\rvert>1$ $\lvert x^2-6x+8\rvert<5x-x^2$	$(x+2)^2=2\lvert x+2\rvert+3$ $\lvert x+3\rvert=x^2+x-6$ $\lvert x+3\rvert-\lvert 5-2x\rvert=2-3x$ $\lvert 3x-2\rvert x<1$ $\lvert 3+x\rvert\geq\lvert x\rvert$	$\lvert 4-x\rvert+\lvert 2x-2\rvert=5-2x$ $x^2+4\lvert x-3\rvert-7x+11=0$ $\lvert x^2-x-1\rvert=1$ $x^2-4\lvert x\rvert<12$ $\lvert x+2\rvert<\lvert x-2\rvert$	$\lvert 4-x\rvert+\lvert 2x-2\rvert=5-2x$ $\lvert x^2+-1\rvert=2x-1$ $\lvert x^3-x\rvert=x+4$ $\lvert x^2-3x\rvert\geq x+5$ $\lvert x^2-6x+8\rvert<5x-x^2$
$x^2-4\lvert x-3\rvert-7x+11=0$ $\lvert x^2-9\rvert+\lvert x+3\rvert=6$ $\lvert x+3\rvert=x^2+x-6$ $x^2+\lvert 5x-4\rvert-1\leq\lvert 3x-2\rvert$ $\lvert 3x-5\rvert>9x+1$	$x\lvert x\rvert+8x-7=0$ $\lvert 3x-1\rvert=\frac{1}{4x-1}$ $\lvert x-2\rvert-3\lvert 3-x\rvert+x=0$ $\lvert x\rvert-2\lvert x+1\rvert+3\lvert x+2\rvert\geq 0$ $x^2-x-2<\lvert 5x-3\rvert$	$\lvert x+3\rvert-\lvert 5-2x\rvert=2-3x$ $\lvert x+3\rvert=x^2+x-6$ $(x+2)^2=2\lvert x+2\rvert+3$ $x^2-4\lvert x\rvert<12$ $\lvert 3x-2\rvert x<1$	$\lvert x^2-x-1\rvert=1$ $x^2+4\lvert x-3\rvert-7x+11=0$ $\lvert 4-x\rvert+\lvert 2x-2\rvert=5-2x$ $\lvert x\rvert-2\lvert x+1\rvert+3\lvert x+2\rvert\geq 4$ $\lvert x^2-3x\rvert\geq x+5$

<table>
<tr>
<td>$|x-2|x-6x+8=0$
$|x^2-9|+|x-3|=6$
$|x^2+x-1|=2x-1$
$|x^2+x-2|>|x-2|$
$2|x+1\ge x-1|$</td>
<td>$|x^2-x-1|=1$
$x^2-4|x+1|+5x+4=0$
$|x+3|-|5-2x|=2-3x$
$x^2+|5x-4|-1\le|3x-2|$
$x^2-x-2<|5x-3|$</td>
<td>$|x^2+x-1|=2x-1$
$|x+3|=x^2+x-6$
$|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$
$|3x-2|x<1$
$|x^2+5x|<6$</td>
<td>$|x^2-4x|=4$
$|x-2|-3|3-x|+x=0$
$x|x|+8x-7=0$
$|3+x|\ge|x|$
$|x|-2|x+1|+3|x+2|\ge4$</td>
</tr>
<tr>
<td>$x^2+4|x-3|-7x+11=0$
$|x^2-9|+|x-3|=6$
$|3x-1|=\frac{1}{4x-1}$
$x^2-x-2<|5x-3|$
$|x^2+5x|<6$</td>
<td>$(x+2)^2=2|x+2|+3$
$|x^3-x|=x+4$
$|4-x|+|2x-2|=5-2x$
$|3x-2|x<1$
$|x^2+3x|\ge2-x^2$</td>
<td>$|x|+|3x+2|+|2x-1|=5$
$|x^2-x-1|=1$
$|x-2|x-6x+8=0$
$|x^2-3x|\ge x+5$
$x^2-4|x|<12$</td>
<td>$x|x|+8x-7=0$
$|3x-1|=\frac{1}{4x-1}$
$|x-2|-3|3-x|+x=0$
$|3+x|\ge|x|$
$2|x+1|\ge x-1$</td>
</tr>
<tr>
<td>$|x+3|=x^2+x-6$
$|x^2-9|+|x-3|=6$
$|x-2|x-6x+8=0$
$x^2-4|x|<12$
$|x+2|<|x-2|$</td>
<td>$(x+2)^2=2|x+2|+3$
$x^2-4|x+1|+5x+4=0$
$|4-x|+|2x-2|=5-2x$
$|x+1|-|x-1|>1$
$|3x-5|>9x+1$</td>
<td>$|x^2-x-1|=1$
$|x+3|=x^2+x-6$
$|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$
$|3+x|\ge|x|$
$x^2-x-2<|5x-3|$</td>
<td>$|x^3-x|=x+4$
$x|x|+8x-7=0$
$|x^2-4x|=4$
$|3x-5|>9x+1$
$|x^2-6x+8|<5x-x^2$</td>
</tr>
</table>

Ответы к зачетной работе по теме «Уравнения и неравенства с модулем

<table>
<tr>
<td>$-1;0;1;2$
$-5;1$
$\frac{11}{5};7$
$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$</td>
<td>$2;2+\sqrt{8};2-\sqrt{8}$
$-4+\sqrt{23}$
$-3;2;\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$
$x\in R$
$\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$</td>
<td>$\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1$
-2
$2;2\pm\sqrt{8}$
$(-\infty;0)$
$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$</td>
<td>±3
$-2\pm2\sqrt{3};4+2\sqrt{2}$
$\frac{11}{5};7$
$(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$
$(-6;-3)\cup(-2;1)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$1;\frac{2}{3}$
$\frac{7}{12}$
$-2;2\pm\sqrt{8}$
$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$
$\left(\frac{11-\sqrt{57}}{4};\frac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$</td>
<td>$5;1$
±3
$--1$
$(-\infty;1)$
$\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$</td>
<td>1
$\frac{11-\sqrt{29}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
$-1;0;1;2$
$(-6;6)$
$(-\infty;0)$</td>
<td>1
$\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1$
$2;-\sqrt[3]{4}$
$(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$
$\left(\frac{11-\sqrt{57}}{4};\frac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$</td>
</tr>
</table>

-8;-1;0 -3;2; $\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$ -3;3 $\left[-4-\sqrt{11};1\right]$ $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$	$4+\sqrt{23}$ $\frac{7}{12}$ $-\frac{11}{5};7$ $(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$ $\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$	-1 -3;3 -5;1 $(-6;6)$ $(-\infty;1)$	-1;0;1;2 $\frac{11-\sqrt{29}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ 1 $(-\infty;-4]\cup[-1;\infty)$ $(-\infty;-1]\cup[5;\infty)$
- $\pm 2\sqrt{3};4+2\sqrt{2};$ $-3;2;\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$ $\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1$ $(-\infty;-2)(-2;0)\cup(2;+\infty)$ $x\in R$	-1;0;1;2 -8;-1;0 -1 $\left[-4-\sqrt{11};1\right]$ $\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$	$\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1$ $-3;3$ -2 $(-\infty;1)$ $(-6;-3)\cup(-2;1)$	$2;2\pm\sqrt{8}$ $\frac{11}{5};7$ $-4+\sqrt{23}$ $\left[-\frac{3}{2};\infty\right)$ $(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$
$\frac{11-\sqrt{29}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ $-3;2;\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$ $\frac{7}{12}$ $\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$ $(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$	-5;1 $2;-\sqrt[3]{4}$ 1 $(-\infty;1)$ $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$	-1; $\frac{2}{3}$ -1;0;1;2 $-2\pm 2\sqrt{3};4+2\sqrt{2}$ $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$ $(-6;6)$	$-4+\sqrt{23}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{11}{5};7$ $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$ $x\in R$
-3;3 -3;2; $\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$ $-2\pm 2\sqrt{3};4+2\sqrt{2}$ $(-6;6)$ $(-\infty;0)$	-5;1 -8;-1;0 1 $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$	-1;0;1;2 -3;3 -2 $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$ $\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$	$2;-\sqrt[3]{4}$ $-4+\sqrt{23}$ $2;2\pm\sqrt{8}$ $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{11-\sqrt{57}}{4};\frac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$

Зачетная работа по теме «Системы уравнений».

$\begin{cases} x+y^2=2, \\ 2y^2+x^2=3; \end{cases}$	$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=9, \\ 4x^2+xy+4y^2=18, \end{cases}$
$\begin{cases} 2x^2-3xy+5y=5, \\ (x-2)(y-1)=0; \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$
$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ xy=8; \end{cases}$	$\begin{cases} (x+y)^3(x-y)^2=27, \\ (x-y)^3(x+y)^2=9; \end{cases}$
$\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x+xy+y=9; \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$

$\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x; \end{cases}$ $\begin{cases} xy^3 + x^3y = -10, \\ x^2y^4 + x^4y^2 = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 - xy = 2; \end{cases}$	$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y + 10 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 28, \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ xy(x - y) = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + x^2y = 12 \end{cases}$
$\begin{cases} x + y^2 = 2, \\ 2y^2 + x^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 9, \\ 4x^2 + xy + 4y^2 = 18; \end{cases}$ $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y + 10 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ (x - 2)(y - 1) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 28, \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28; \end{cases}$
$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ xy(x - y) = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} xy^3 + x^3y = -10, \\ x^2y^4 + x^4y^2 = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} (x + y)^3(x - y)^2 = 27, \\ (x - y)^3(x + y)^2 = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + x^2y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 - xy = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9; \end{cases}$

Ответы к зачетной работе по теме «Системы уравнений»

$(1;-1)(1;1)$ $(2;3)(0;1)(1,5;1)$ $(8;1)(1;8)$ $(4;1)(1;4)$	$(2;-1)(-1;2)(-2;1)(1;-2)$ $(3;2)(2;3)(-3;-2)(-2;-3)$ $(2;1)$ $(2;3)(-2;-3)(-2;3)(2;-3)$
$(5;2)(-2;-5)$ $(1;1)$ $(2;-1)(-2;1)(1;-2)(-1;2)$ $(2;1)(-2;-1)$	$(3;1)(1;2)$ $(4;2)(-4;-2)$ $(3;2)(-2;-3)$ $(2;1)(-2;5)$
$(1;-1)(1;1)$ $(2;-1)(-1;2)(-2;1)(1;-2)$ $(5;2)(-2;-5)$ $(3;1)(1;2)$	$(2;3)(0;1)(1,5;1)$ $(3;2)(2;3)(-3;-2)(-2;-3)$ $(1;1)$ $(4;2)(-4;-2)$

$(3;2)(-2;-3)$ $(2;-1)(-2;1)(1;-2)(-1;2)$ $(2;1)$ $(8;1)(1;8)$	$(2;1)(-2;5)$ $(2;1)(-2;-1)$ $(2;3)(-2;-3)(-2;3)(2;-3)$ $(4;1)(1;4)$

Зачетная работа по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»

$\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$ $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$ $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$ $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$ $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$ $\sqrt{x^2+5x}<\sqrt{1-x^2+4x}$ $\sqrt{x^2-5x-24}>x+2$	$2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-10}=0$ $2\sqrt{x^2-2x-8}-\sqrt{x^2-16}=\sqrt{3x^2-13x+4}$ $\frac{x^2}{\sqrt{2x+5}}+\sqrt{2x+5}=2x$ $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$ $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$ $\sqrt{x^2-5x-24}>x+2$
$\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$ $\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$ $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$ $\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3$ $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$ $\sqrt{x-6}-\sqrt{x+10}\le 1$ $\sqrt{x^2-3x-18}<4-x$	$\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$ $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x$ $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$ $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$ $x+4>2\sqrt{4-x^2}$ $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\ge 0$
$\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$ $2\sqrt{x^2-2x-8}-\sqrt{x^2-16}=\sqrt{3x^2-13x+4}$ $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$ $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$ $\sqrt{x^2+5x}<\sqrt{1-x^2+4x}$ $(x+8)\sqrt{x^2-5x+4}\le 0$	$\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$ $\sqrt{2x^2+5x+2}\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$ $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$ $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$ $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$ $\sqrt{x^2-3x-18}<4-x$ $\sqrt{x-6}-\sqrt{x+10}\le 1$
$x+\sqrt{2x^2-14x+13}=5$ $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$ $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$ $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$ $x+4>2\sqrt{4-x^2}$ $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\ge 0$	$\sqrt{6x^2+2x-10}=\sqrt{x^2-x-2}$ $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$ $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$ $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$ $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$ $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$ $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

Ответы к зачетной работе по теме «Иррациональные уравнения и неравенства».

4 3 19;84 -15;13 4 $[0;0,5)$ $(-\infty;-3]$	2 4 5 2 нет корней $(-1;+\infty)$ $(-\infty;-3]$
-2;1;13 $-\frac{4}{3}$ 0 -2;5 4 $[6;+\infty)$ $(-\infty;-3]$	3 -1 -4,5;3 -15;13 нет корней $[-2;-1,6)$ $[-2;4]$
0;5 4 19;84 -4;2 нет корней $[0;0,5)$ $(-\infty;-8]\cup\{1;4\}$	-1 -2;1;13 -4,5;3 2 4 $(-\infty;-3]$ $[6;+\infty)$
-2 4 3 5 нет корней $[-2;-1,6)$ $[-2;4]$	-1,6 3 19;84 -15;13 4 $(-1;+\infty)$ $(2\sqrt{2};+\infty)$

Самостоятельная работа «Применение свойств функций к решению уравнений»

Вариант1 1.Решите уравнения: $\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+10}=3$ $(\sin x+1)\left(1+\sqrt{(\sin x+1)^2+7}\right)-\left(1+\sqrt{\cos^2 x+7}\right)\cos x=0$ 2. Решите неравенство: $\lvert ctgx\rvert+\frac{1}{\lvert ctgx\rvert}\le 2-x^2-\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{16}$
Вариант2 1. Решите уравнения:

$$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{2x^2-8x+17}=4$$

$$\left(1+\sqrt[4]{\log^4{}_2 x+2}\right)\log^2{}_2 x+\left(1+\sqrt[4]{\log^2{}_{0,5} x+2}\right)\log_{0,5} x=0$$

2. Решите неравенство:

$$|tgx|+\frac{1}{|tgx|}\le 2-x^2+\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{16}$$

Вариант3

1. Решите уравнения:

$$|\lg(x-5)|+2=\sqrt{4-(x-6)^2}$$

$$x^5+x^3+1-\sqrt{10-x}=0$$

2. Решите неравенство:

$$\sqrt{\log_2(x-3)}+10^{\log_2(x-3)}\le\sqrt{\log_2\left(x^2-3x\right)}+10^{\log_2\left(x^2-3x\right)}$$

Вариант4

1. Решите уравнения:

$$|\lg(x-4)|+3=\sqrt{9-(x-5)^2}$$

$$x^5+x^3-37-\sqrt{25-8x}=0$$

2. Решите неравенство:

$$\sqrt{\log_5(x+1)}+3^{\log_5(x+1)}<\sqrt{\log_5\frac{2}{x}}+3^{\log_5\frac{2}{x}}$$

При работе над блоком «Итоговое повторение» в качестве контроля за выполнением долгосрочных домашних работ (методическое пособие «Подготовка к ЕГЭ. Итоговое повторение») предложены релейные контрольные работы (методическое пособие «Подготовка к ЕГЭ. Итоговое повторение (карточки с заданиями)»

Критерии оценивания

Каждый вариант состоит из двух частей. Первая часть (до черты) включает материал домашней работы. Выполнение этой части гарантирует учащемуся получение хорошей оценки. Вторая часть (после черты) включает задания, более сложные с технической точки зрения и гарантирует учащемуся получение отличной оценки.

Учебно-тематический план

№п/п	**Содержание**	**Учебное время, часы (68 ч)**
	10 класс	
	1 Уравнения высших степеней (26 часов)	
1	Многочлены. Деление многочлена	2
2	Теорема Безу. Схема Горнера	2
3	Введение новой переменной	2
4	Возвратные уравнения	1
5	Однородные уравнения.	1
6	Выделение полного квадрата	1
7	Метод неопределенных коэффициентов	3
8	Дробно - рациональные уравнения	4

№п/п	Содержание	Учебное время, часы (68 ч)
9	Неравенства. Метод интервалов	4
10	Уравнения и неравенства с двумя переменными	4
11	Зачетное занятие	2
	2. Уравнения и неравенства с модулем. (24 часа)	
1	Уравнения вида: $\lvert f(x)\rvert = g(x); \lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$;	2
2	Уравнения и неравенства с несколькими модулями;	4
3	Неравенства вида: $\lvert f(x)\rvert \le g(x); \lvert f(x)\rvert \ge g(x); \lvert f(x)\rvert \le \lvert g(x)\rvert$;	2
4	Уравнения и неравенства, решаемые заменой переменной	2
5	Уравнения и неравенства, содержащие модуль в модуле,	4
6	Построение графиков функций, содержащих модуль (метод симметрии)	4
7	Метод областей.	4
8	Зачетное занятие	2
	3.Системы уравнений (18 часов)	
1	Системы, решаемые подстановкой	1
2	Системы, решаемые алгебраическим сложением	1
3	Системы, решаемые умножением и делением	2
4	Системы, решаемые введением новой переменной	2
5	Симметрические системы	2
6	Применение однородных уравнений к решению систем	2
7	Системы трех уравнений с тремя неизвестными, линейные	3
8	Системы трех уравнений с тремя неизвестными, нелинейные	3
9	Зачетное занятие	2
	11 класс	
	4.Иррациональные уравнения и неравенства (12 часов)	
1	Уравнения вида: $\sqrt{f(x)} = \varphi(x); \sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}; g(x)\cdot\sqrt{f(x)} = 0$;	2
2	Уравнения вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{g(x)}$ $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{\varphi(x)} = g(x)$	1
3	Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{\varphi(x)} = g(x)$;	2
4	Неравенства вида: $\sqrt{f(x)} \le \varphi(x)$; $\sqrt{f(x)} \ge \varphi(x); \sqrt{f(x)} \le (\ge)\sqrt{\varphi(x)}$	2
5	Уравнения и неравенства, решаемые введением новой переменной	1
6	Уравнения и неравенства, решаемые приведением к квадрату двучлена под знаком радикала	1
7	Уравнения и неравенства, решаемые умножением на сопряженное	1
8	Уравнения и неравенства, решаемые применение однородных уравнений	1
9	Зачетное занятие	1
	5. Задания с параметром (22 часа)	
1	Линейное уравнение с параметром	1
2	Дробно-рациональные уравнения с параметром. Уравнения с заданными условиями	2
3	Квадратные уравнения с параметром. Квадратные уравнения с заданными условиями.	4
4	Линейные неравенства с параметром.	1

№п/п	Содержание	Учебное время, часы (68 ч)
5	Квадратные неравенства с параметром. Метод интервалов при решении неравенств с параметром	4
6	Уравнения и неравенства с параметром, содержащие переменную под знаком модуля.	4
7	Графический метод при решении линейных уравнений и неравенств с параметром.	4
8	Зачетное занятие	2
6.Применение свойств функции к решению уравнений (16 часов)		
1	Сравнение областей определения	3
2	Сравнение областей значений	4
3	Применение четности.	3
4	Симметричность функций.	2
5	Применение монотонности	2
6	Самостоятельная работа	2
7. Итоговое повторение (18 часов)		
1	Числа и тождественные преобразования	2
2	Производная и ее применение	2
3	Первообразная и ее применение	2
4	Уравнения высших степеней, системы уравнений, неравенства	2
5	Уравнения и неравенства с модулем, системы уравнений и неравенств. Иррациональные уравнения, системы уравнений, неравенства	2
7	Тригонометрические уравнения, неравенства, системы уравнений	2
8	Показательные уравнения, системы уравнений, неравенства	3
9	Логарифмические уравнения, системы уравнений, неравенства	3

Рекомендуемая литература

1. Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003,-336с.
2. Доброва О.Н. Задания по алгебре и началам анализа: Пособие для учащихся 9-11 кл. общеобразовательных учреждений – М.: Просвещение, 1996 .
3. Задания для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа: Кн. Для учащихся 11 кл. общеобразовательных учреждений / Е.А. Семенко, С.Д. Некрасов и др. – М.: Просвещение, 1997 г.
4. Задачи по алгебре и началам анализа: Пособие для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений/ СМ. Саакян, А.М. Гольдман, Д.В. Денисов. – М.: Просвещение 2003 г.
5. Иванов М.А. Математика без репетитора: 800 задач с ответами и решениями для абитуриентов. – М: Вентана-Графф,2002.
6. Мерзляк А.Г. и другие «Алгебраический тренажёр: Пособие для школьников и абитуриентов – Киев «А.С.К.»1997г.
7. Моденов В.П. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие. – М.: «Экзамен», 2006.-285
8. Романова Т.Е. Решение уравнений и неравенства первой степени с параметрами. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля: Учебно-методическое пособие. – Магнитогорск: МаГУ, 2004.-63 с.
9. Романова Т.Е., Романов П.Ю. Задания с параметром: Методическое пособие.- МГПИ,1996г.
10. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы.: Учеб. пособие. Дыбов П.Т. и др. под ред. Прилепко – М.: Высш. школа,1983 г.

11. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. Под ред. Сканави. – М:1996г
12. Система тренировочных задач и упражнений по математике/Симонов А.Я. и др. – М.: Просвещение,1991г.
13. Фальке Л.Я. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе: Учебно-методические материалы. – М.: Народное образование; Илекса; Ставрополь: Сервисшкола,2005.- 120с.
14. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука,1989 г.
15. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. – М.: Рольф 1997г.
16. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в ВУЗы: Учеб. пособие – М.: «Дрофа»,1997г.
17. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметром. – СПб.: «ЧеРо-на-Неве»,2015.

Конспекты занятий:

1. Уравнения высших степеней.

Способ подбора целочисленного корня.

Если коэффициенты многочлена – целые числа, то целые корни уравнения следует искать среди делителей свободного члена. Когда целый корень X_1 найден, разделим стоящий в левой части многочлена на $(X-X_1)$. Уравнение примет вид $(X-X_1)P_1(X)=0$. Приравнивания $P_1(X)$ к нулю, получаем уравнение более низкой степени.

Пример1: $X^4-4X^3-13X^2+28X+12=0$.

Угадаем хотя бы один корень данного уравнения. «Кандидатами» в целочисленные корни являются числа : $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 12$.

Подстановкой в исходное уравнение находим корень X=2.

Делим многочлен $X^4-4X^3-13X^2+28X+12$ на (X-2).

$X^4-4X^3-13X^2+28X+12$ $\underline{X-2}$

X^4-2X^3 $\qquad\qquad X^3-2X^2-17X-6$

$-2X^3-13X^2$

$-2X^3+4X^2$

$-17X^2+28X$

$-17X^2+34X$

$-6X+12$

$-6X+12$

0

Уравнение примет вид: $(X-2)(X^3-2X^2-17X-6)=0$

Решаем уравнение $X^3-2X^2-17X-6=0$

Подбираем корни среди делителей 6: ±1; ±2; ±3; ±6

Убеждаемся, что X=-3 будет корнем.

Разделим многочлен $X^3-2X^2-17X-6$ на X+3 воспользовавшись схемой Горнера

Составим таблицу:

	1	-2	-17	-6
-3				
	1	-5	-2	0

Исходное уравнение примет вид $(X-2)(X+3)(X^2-5X-2)=0$

Квадратное уравнение $X^2-5X-2=0$ имеет корни: $X=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

Ответ: 2;-3; . $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

Пример2: $4X^3-10X^2+14X-5=0$

Целые корни подобрать не удается.

Умножим уравнение на 2: $8X^3-20X^2+14X-5=0$

Или $(2X)^3-5(2X)^2+14(2X)-10=0$

Замена 2X=Y приводит данное уравнение к виду: $Y^3-5Y^2+14Y-10=0$

Подбором убеждаемся, что корень Y=1

Делим $Y^3-5Y^2+14Y-10$ на $Y-1$

Получим $Y^3-5Y^2+14Y-10 = (Y-1)(Y^2-4Y+10)$

Уравнение $Y^2-4Y+10=0$ не имеет действительных корней, поэтому единственный корень Y=1 или $X=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Способ группировки.

Пример3: $8X^4+X^3+64X+8=0$

$8X^4+X^3+64X+8=(8X^4+X^3)+(64X+8)=X^3(8X+1)+8(8X+1)=(8X+1)(X^3+8)=$

$(8X+1)(X+2)(X^2-2X+4)$

Решаем уравнение (8X+1)(X+2)(X^2 -2X+4)=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8X+1=0 \\ X+2=0 \\ X-2X+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-\frac{1}{8} \\ X=-2. \end{array}\right.$

Ответ: -2 ; X=-$\frac{1}{8}$.

Способ решения возвратных уравнений.

Уравнения вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ называется возвратным , если его коэффициенты , стоящие на симметричных позициях , то есть если : $a_{n-k} = a_k$ при i=0,1,…n.

Так как $x = 0$ не является решением возвратного уравнения , то можно разделить на x^n

Рассмотрим возвратное уравнение четвертой степени вида : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,где a,b,c –любые числа, $a \neq 0$.

Его удобно решать с помощью следующего алгоритма:

-разделить левую и правую части уравнения на x^2.При этом не происходит потеря решения , так как x=0 не является корнем исходного уравнения.

-группировкой привести полученное уравнение к виду : $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$,ввести новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$,тогда $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$,то есть $x^2 + x\frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

В новых переменных рассматриваемое уравнение является квадратным : $ay^2 + by + c - 2a = 0$.

-решить его относительно Y , возвратиться к исходной переменной.

Пример4 : $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Разделим обе части на x^2 и сгруппируем :$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$

Замена : $y = x + \frac{1}{x}$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ приводит данное уравнение к виду:

$(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=4. \end{array}\right.$

Возвращаемся к исходной переменной: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=1 \\ x+\frac{1}{x}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Для возвратных уравнений более высоких степеней верны следующие утверждения:

-возвратное уравнение четной степени сводится к уравнению вдвое меньшей степени подстановкой:

$x+\frac{1}{x}=y$.

-возвратное уравнение нечетной степени обязательно имеет корень $x=-1$ и после деления многочлена, стоящего в левой части этого уравнения , на двучлен $x+1$, приводится к возвратному уравнению четной степени .

Однородные уравнения.

$X=0$ не является корнем таких уравнений, поэтому при делении на x^n не происходит потеря корней.

Пример5: $x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$

X=0 –не корень .Делим на x^2

$x^2-3x-8+\frac{12}{x}+\frac{16}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{16}{x^2}-3(x-\frac{4}{x})-8=0$

Замена: $x-\frac{4}{x}=y$; $x^2+\frac{16}{x^2}=y^2+8$ приводит данное уравнение к ввиду:

$y^2+8-3y-8=0 \Leftrightarrow y(y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=3. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{4}{x}=0 \\ x-\frac{4}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ x^2-3x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ: -2; 2; -1; 4.

Пример6: $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$

Разделим на $x^4 \neq 0$

$\frac{(x^2-x+1)^2}{x^4}-6\frac{(x^2-x+1)^2}{x^2}+5=0$

Замена: $\frac{(x^2-x+1)^2}{x^2}=y$,$(y \succ 0)$ приводит уравнение к виду:

y^2-6y+5=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=5. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x^2-x+1)^2}{x^2}=1 \\ \dfrac{(x^2-x+1)^2}{x^2}=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x^2-x+1)^2-x^2}{x^2}=0 \\ \dfrac{(x^2-x+1)^2-5x^2}{x^2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x^2-x+1-x)(x^2-x+1+x)=0 \\ (x^2-x+1-\sqrt{5}x)(x^2-x+1+\sqrt{5}x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: 1; $\dfrac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2}$.

Пример 7: $(x^2+x+1)^2=x^2(3x^2+x+1)$

Представим уравнение в виде: $(x^2+x+1)^2=x^2(2x^2+x^2+x+1)$ или $(x^2+x+1)^2=2x^4+x^2(x^2+x+1)$

Разделим на $x^4\neq 0$

$$\frac{(x^2+x+1)^2}{x^4}=2+\frac{(x^2+x+1)}{x^2}$$

Замена: $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$=y приводит данное уравнение к виду: y^2-y-2=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=2. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x+1}{x^2}=-1 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x^2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x+1=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Пример 8: $\dfrac{2x}{x^2-4x+2}+\dfrac{3x}{x^2+x+2}=-\dfrac{5}{4}$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $x\neq 0$

$$\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4}$$

Замену $x+\frac{2}{x}=y$ приводит данное уравнение к виду: $\frac{2}{y-4}+\frac{3}{y+1}+\frac{5}{4}=0 \Leftrightarrow \frac{y^2+y-12}{4(y-4)(y+1)} \left[\begin{array}{l} y=-4 \\ y=3 \end{array}\right.$

Вернемся к исходной переменной: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{2}{x}=-4 \\ x+\frac{2}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x+2=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{2} \\ x=-2+\sqrt{2} \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Ответ: $-2\pm\sqrt{2}$;1 ; 2.

Способ введения новой переменной.

Пример 9: $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$

Пусть $x^2+3x+1=y$, тогда $x^2+3x+3=y+2$. Решим уравнение: $y(y+2)+1=0$

$y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow (y+1)^2=0 \Leftrightarrow y=-1$

Вернемся к исходной переменной: $x^2+3x+1=-1 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Ответ: -2; -1.

Пример 10: $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$

Замена: $\frac{x^2+x-5}{x}=y$; $\frac{3x}{x^2+x-5}=\frac{3}{y}$ приводит данное уравнение к виду:

$y+\frac{3}{y}+4=0 \Leftrightarrow y^2+4y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2+x-5}{x}=-3 \\ \frac{x^2+x-5}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-5=0 \\ x^2+2x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-1-\sqrt{6} \\ x=-1+\sqrt{6} \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: -5; $-1\pm\sqrt{6}$; 1.

Пример 11: $(x^2+6x)^2-2(x-3)^2=81$

Выполним преобразование второго слагаемого: $(x^2-6x)^2-2(x^2-6x+9)=81$

Замена: x^2-6x=y приводит данное уравнение к виду: y^2-2(y+9)=81 $\Leftrightarrow$ y^2-2y-99=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -9 \\ y = 11 \end{array}\right.$ x^2-6x=-9 $\Leftrightarrow$ x^2-6x=11 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3-\sqrt{20} \\ x = 3+\sqrt{20} \\ x = 3. \end{array}\right.$

Ответ: 3; $3 \pm \sqrt{20}$

Пример 12: $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0.$

Перепишем уравнение в виде: $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+5+4=0$;

$(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x-1)+4=0$

Замена: $2x^2+3x-1=y$ приводит данное уравнение к виду: $y^2-5y+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 4. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+3x-1=1 \\ 2x+3x-1=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -2,5 \\ x = 0,5 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{5}{2}$; -2; $\frac{1}{2}$;1.

Пример 13: (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3

Сгруппируем следующим образом: ((x+1)(x+4))((x+2)(x+3))=3

Раскроем внутренние скобки: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$

Замена: $x^2+5x+4=y$ приводит данное уравнение к виду: y(y+2)=3 $\Leftrightarrow$ $y^2+2y-3=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3 \\ y = 1. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+4=-3 \\ x^2+5x+4=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+7=0 \\ x^2+5x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

Пример 14: $2(6x+5)^2(3x+2)(x+1))=1$

Перепишем уравнение в виде: $(6x+5)^2 2(3x+2)(x+1)=1 \Leftrightarrow (6x+5)^2(6x+4)(x+1)=1$

Умножим уравнение на 6 : $(6x+5)^2(6x+4)(6x+6)=6$

Замена $6x+5=y$ приводит данное уравнение к виду: $y^2(y-1)(y+1)=6 \Leftrightarrow y^2(y^2-1)=6 \Leftrightarrow$

$y^4-y^2-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=-2 \\ y^2=3 \end{array}\right.$

В первом случае действительных корней нет, для второго случая найдем значения x

$6x+5=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pm\sqrt{3}-5}{6}$.

Ответ: $\frac{\pm\sqrt{3}-5}{6}$.

Пример 15: $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$

Вынесем из каждой скобки множитель x: $x(2x-3+\frac{1}{x})x(2x+5+\frac{1}{x})=9x^2$

Подстановкой убеждаемся, что $x=0$ не является корнем уравнения, поэтому разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$.

$(2x+\frac{1}{x}-3)(2x+\frac{1}{x}+5)=9$.

Замена: $2x+\frac{1}{x}-3=y$ приводит данное уравнение к виду: $y(y+8)=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-9 \\ y=1. \end{array}\right.$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+\frac{1}{x}-3=1 \\ 2x+\frac{1}{x}-3=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-4x+1=0 \\ 2x^2+6x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2} \\ x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$; $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Пример 16: $(x+1)^4+(x+5)^4=32$

Введем новую переменную следующим способом: $x=y-\frac{1+5}{2}$, $x=y-3$; тогда $x+1=y-2$

$(y-2)^4+(y+2)^4=32$ Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые , получим :

$y^4+24y^2=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow x=-3$

Ответ: -3

Пример 17: $x^2+\frac{81x^2}{(x+9)^2}=40$

Выделим квадрат разности в левой части: $x^2-\frac{18x^2}{x+9}+\frac{81x^2}{(x+9)^2}+\frac{18x^2}{x+9}=40$

$(x-\frac{9x}{x+9})^2+\frac{18x^2}{x+9}=40$; $(\frac{x^2}{x+9})^2+\frac{18x^2}{x+9}=40$. Замена $\frac{x^2}{x+9}$=y приводит данное уравнение к виду:

$y^2+18y-40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-20 \\ y=2. \end{array}\right.$ Далее: $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+9}=-20 \\ \frac{x^2}{x+9}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+20x+180=0 \\ x^2-2x-18=0 \\ x\neq -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{19} \\ x=1+\sqrt{19} \end{array}\right.$

Ответ: $1\pm\sqrt{19}$

Пример 18: $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4$

Избавимся от x в числителях дробей: $\frac{x-1+2}{x-1}+\frac{x+2-4}{x+2}+\frac{x+3-6}{x+3}+\frac{x-4+8}{x-4}=4$

$1+\frac{2}{x-1}+1-\frac{4}{x+2}+1-\frac{6}{x+3}+1+\frac{8}{x-4}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}+\frac{4}{x-4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5x-8}{(x-1)(x-4)}-\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+5x-16}{(x-1)(x-4)(x+2)(x+3)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-5-\sqrt{345}}{10} \\ x=\frac{-5+\sqrt{345}}{10} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{-5\pm\sqrt{345}}{10}$.

Рациональные неравенства.

Рассмотрим многочлен: $P(x)=(a_1x+b_1)^{n_1}(a_2x+b_2)^{n_2}\bullet\ldots\bullet(a_mx+b_m)^{n_m}$, где коэффициенты $a_i>0$, а n_i-натуральные числа.(Если некоторые числа $a_i<0$,то выносим (-1 за скобки столько раз, сколько имеем таких коэффициентов.)

Многочлен $P(x)$ легко привести к виду: $P(x)=$ $a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_m\bullet(x-x_1)^{n_1}\bullet(x-x_2)^{n_2}\bullet\ldots\bullet(x-x_m)^{n_m}$

Где $x_1<x_2<\ldots<x_m$. Теперь на числовой оси отметим точки $x_1, x_2, \ldots x_m$ и нарисуем кривую знаков P(x) справа налево x_1 ____ x_2 ____ x_3 ____________ x_m

Если $(a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_m)<0$, то умножаем обе части неравенства на (-1) и меняем знак неравенства на противоположный. При $x>x_m$ все сомножители многочлена P(x) больше нуля и P(x)>0 (если $(a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_m)>0$).Если n_m-число нечетное, то при переходе через точку x_m многочлен P(x) меняет знак , так как меняет знак выражение $\left(x-x_m\right)^{n_m}$, а знаки остальных выражений сохраняются. Затем исследуется изменение знака в точке x_{m-1} и так далее. Если же некоторое число n_i -четное, то в точке x_i знак выражения не меняется.

Пример 1: Решить неравенство $(2x+1)(2-x)(x-1)^2(x-3)^5(3x-2)<0$

Решение. Это неравенство равносильно следующему неравенству

$$2(x+\frac{1}{2})(-1)(x-2)(x-1)^2(x-3)^5 3(x-\frac{2}{3})<0 \quad \Leftrightarrow P(x)=(x+\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})(x-1)^2(x-2)(x-3)^5>0$$

Знак неравенства изменился, так как было умножение на отрицательное число.

Теперь применим метод интервалов. Отметим точки на числовой оси, в которых многочлен обращается в ноль. После этого расставим знаки на каждом промежутке.

$$+ \quad -\frac{1}{2} \quad - \quad \frac{2}{3} \quad + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad - \quad 3 \quad + \quad X$$

При $x>3$ $P(x)>0$. В точке $x=3$ $P(x)$ –меняет знак с плюса на минус, так как меняет знак $(x-3)^5$.

В точке $x=2$ опять происходит смена знака с «-» на «+» . В точке $x=1$ смены знака не будет, так как степень у сомножителя $(x-1)^2$ четная. В точках $x=\frac{2}{3}$ и $x=-\frac{1}{2}$ опять будет смена знаков.

$$\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ -3<x<-2 \\ -2<x-0 \\ x>5 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-4\ )\cup(-3;-2)\cup(-2;0)\cup(5;+\infty)$.

Обычно на экзаменах встречаются неравенства вида: $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}>\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, которые приводятся к описанному выше виду следующим образом. Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}-\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}>0 \ \Leftrightarrow \frac{P_1(x)\cdot Q_2(x)-P_2(x)\cdot Q_1(x)}{Q_1(x)\cdot Q_2(x)}>0 \quad \text{или} \quad \frac{P(x)}{Q(x)}>0$$

, где $P(x)=P_1(x)Q_2(x)-P_2(x)Q_1(x)$,

а $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$

Пример 2: Решите неравенство: $\frac{1}{x+2} \ge \frac{3}{x-3}$

Решение:

$$\frac{1}{x+2} \ge \frac{3}{x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-9}{(x+2)(x-3)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x+\frac{9}{2}}{(x+2)(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\frac{9}{2} \\ -2 < x < 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup (-2;3)$. Обратить внимание: недопустимо просто домножать неравенство на знаменатели, так как при умножении неравенства на функцию f(x), знак неравенства может измениться на противоположный
(при f(x)<0), то есть

$$\varphi(x) > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \varphi(x)\cdot f(x) > g(x)\cdot f(x), & \text{при } f(x) > 0 \\ \varphi(x)\cdot f(x) < g(x)\cdot f(x). & f(x) < 0 \end{array}\right.$$

Поэтому при решении неравенств такого вида лучше все перенести в левую часть и там уже привести к общему знаменателю без домножения обеих частей на общий знаменатель.

Тренировочные задания по теме «Уравнения высших степеней»

$(8x^2-3x+1)^2=32x^2-12x+1$ $\left\{0;\frac{3}{8};\frac{3\pm\sqrt{73}}{16}\right\}$

$(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$ $\left\{-1;0;\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}\right\}$

$(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$ $\{-4;2\}$

$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$ $\{-1;12\}$

$x(x+3)(x+5)(x+8)=100$ $\{-4\pm\sqrt{21}\}$

$(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16$ $\{-4\pm\sqrt{5}\}$

$x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$ $\left\{-3\pm\sqrt{3};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

$(x^2-3x+1)^2+3(x-1)(x^2-3x+1)=4(x-1)^2$ $\left\{2\pm\sqrt{2};\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$

$(x^2-x)^4-5(x^2-x)^2x^2+6x^4=0$ $\{0;1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{3}\}$

$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$ $\left\{-\frac{1}{2};-\frac{7}{2}\right\}$

$\frac{2x}{x^2-2x+5}+\frac{3x}{x^2+2x+5}=\frac{7}{8}$ $\{1;5\}$

$x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$ $\left\{1;\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

$7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ $\left\{\frac{1}{2};2\right\}$

$x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$ $\{-1;-3;3\pm\sqrt{6}\}$

$3x^2+5x+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=16$ $\left\{1;\frac{-11\pm\sqrt{85}}{6}\right\}$

$x^4-2x^3-13x^2-2x+1=0$ $\left\{\frac{5\pm\sqrt{21}}{2};\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

$(x+5)^4+(x+3)^4=16$ $\{-5;-3\}$

$(x-6)^4+(x-4)^4=82$ $\{3;7\}$

$(2x-1)(x-2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$ $\left\{-2;-\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{x-3}{x+3}-\frac{x-4}{x+4}$ $\left\{-\frac{5}{2};0\right\}$

2.Уравнения и неравенства с модулем.

1.Уравнения вида: $|f(x)|=a$

Уравнения с модулем – частый гость на ЕГЭ , ЦТ

Определение: $|a|=\left[\begin{array}{l}a, a\geq 0,\\ -a, a<0\end{array}\right.$.

Можно дать и другое определение –равносильное . Модуль а равен наибольшему из чисел а и –а , то есть $|a| = \max(a,-a)$.

Рассмотрим основные типы уравнений с модулем.

$$|f(x)| = a\ ,a \ge 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a \end{array}\right.$$

Пример 1: $|5x+4| = 3$

Решение: $\left[\begin{array}{l} 5x+4=3 \\ 5x+4=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{5} \\ x=-\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $-\dfrac{1}{5};-\dfrac{7}{5}$.

Пример 2: $|x^2-2x-7| = 4$

Решение: $\left[\begin{array}{l} x^2-2x-7=4 \\ x^2-2x-7=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-11=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=1\pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ответ: -1 ; 3 ; $1\pm 2\sqrt{3}$.

2. Уравнения вида: $|f(x)| = \varphi(x)$

Способ 1: $|f(x)| = \varphi(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x) \\ f(x)=-\varphi(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$ Способ 2 : $|f(x)| = \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\ge 0 \\ f(x)=\varphi(x) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)<0 \\ -f(x)=\varphi(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$

Пример 3: $|x^2-x-8| = -x$

Решим его первым способом : $|x^2-x-8| = -x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x-8=-x \\ x^2-x-8=x. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2\sqrt{2} \\ x=2\sqrt{2} \\ x=-2 \\ x=4. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Условию $x \le 0$ удовлетворяют корни : $x=-2\sqrt{2}; x=-2$.

Ответ: -2 ; -2$\sqrt{2}$.

Пример 4: $|3x-4| = 4x^2+3x-2$

Его удобнее решить вторым способом, так как подмодульное выражение проще правой части.

$$|3x-4| = 4x^2+3x-2 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-4 \ge 0, \\ 3x-4 = 4x^2+3x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-4 < 0, \\ 3x-4 = -4x^2-3x+2. \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{3} \\ 2x^2+1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{4}{3}, \\ 2x^2+3x-3=0. \end{cases} \end{array}\right. ,$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{3}, \\ 2x^2 = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{4}{3}, \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$.

3. Уравнения вида: $|f(x)| \cdot x = \varphi(x)$

Такие уравнения решают вторым методом: $|f(x)| \cdot x = \varphi(x) \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \cdot x = \varphi(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -x \cdot f(x) = \varphi(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Пример 5: $|2x+1|x-3x-4=0$

$$|2x+1|x-3x-4=0 \Leftrightarrow |2x+1|x = 3x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ (2x+1)x = 3x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+1 < 0 \\ -x(2x+1) = 3x+4. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \\ x^2+2x+2=0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \\ x = \otimes \end{cases} \end{array}\right.$$

Условию $x \ge -\dfrac{1}{2}$ удовлетворяет $x=2$.

Уравнение $x^2+2x+2=0$ не имеет действительных корней.

Ответ: 2

4. Уравнения с несколькими модулями.

$|a_1x+b_1|+|a_2x+b_2|+...+|a_nx+b_n| = f(x)$

«Технология» решения такова:

1. По свойству $|y|=|-y|$ приведем заданное уравнение к виду когда $a_i>0$.

2. Расставим на оси x корни $x_i=-\frac{b_n}{a_n}$ подмодульных выражений (там где происходит смена их знаков)

3. На образовавшихся n+1 промежутках расставим соответствующие знаки подмодульных выражений.

4. Решим n+1 уравнение, проверяя получившиеся корни на вхождение в рассматриваемый промежуток.

Пример 6: $|3-x|+2|x+1|=4$

Решение: $|3-x|+2|x+1|=4 \;\Leftrightarrow 2|x+1|+|x-3|=4$

$$x=-1;\; x=3$$

Расставим знаки подмодульных выражений на интервалах - - -1 - + 3 + + x

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ -x+3-2x-2=4\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 3\\ -x+3+2x+2=4\end{cases}\\ \begin{cases}x>3\\ x-3+2x+2=4.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 3\\ x=-1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>3\\ x=\frac{5}{3.}\end{cases}\end{array}\right.$$

$x=-1$ не принадлежит промежутку $(-\infty;-1)$, а $x=\frac{5}{3}$ не принадлежит промежутку $(3;+\infty)$, но $x=-1$ принадлежит отрезку: $[-1;3]$

Ответ: -1

Пример 7: $|x^2-4x+3|+|x^2-4x-5|=8$

Решение: Корни подмодульных выражений: $x=1; x=3$ и $x=-1; x=5$

+ + -1 + - 1 - - 3 + - 5 + + x

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>5\end{array}\right.\\x^2-4x+3+x^2-4x-5=8\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\3\le x\le 5\end{array}\right.\\x^2-4x+3-x^2+4x+5=8\end{cases}\\\begin{cases}1<x<3\\-x^2+4x-3-x^2+4x+5=8\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>5\end{array}\right.\\x^2-4x-5=0\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\3\le x\le 5\end{array}\right.\\8=8\end{cases}\\\begin{cases}1<x<3\\x^2-4x+3=0\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>5\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\3\le x\le 5\end{array}\right.\\8=8\end{cases}\\\begin{cases}1<x<3\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

-1 $\notin(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$; 5 $\notin(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$, $1\notin(1;3)$, 3 $\notin(1;3)$. Однако 8=8 истина, поэтому

Ответ $[-1;1]\cup[3;5]$.

5. Уравнения вида: $|f(x)|=|\varphi(x)|$

$$|f(x)|=|\varphi(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=\varphi(x),\\f(x)=-\varphi(x).\end{array}\right.$$

Пример 8: $|2x-1|=|x^2-2|$

Решение: $|2x-1|=|x^2-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=x^2-2\\2x-1=-x^2+2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x-1=0\\x^2+2x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\pm\sqrt{2}\\\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.\end{array}\right.$

Ответ: $1\pm\sqrt{2};-3;1$

6. Введение новой переменной:

Пример 9: $6-5|x|+x^2=0$

Решение: Пусть $|x|=y$, причем $y\ge 0$, тогда $x^2=|x|^2=y^2$

Решим уравнение относительно переменной у: $y^2-5y+6=0$. Корни которого у=2; у=3.

Найденные значения удовлетворяют условию $y\ge 0$. Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}|x|=2\\|x|=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\x=\pm 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pm 2;\pm 3$.

Пример 10: $(x^2-5x+6)^2-5|x^2-5x+6|-6=0$

Пусть $\left|x^2-5x+6\right|=y, y\ge 0.$

Решим уравнение: $y^2-5y-6=0$. Корнями данного уравнения являются значения: $y=-1; y=6$

$y=-1$ не удовлетворяет условию $y\ge 0$.

Вернемся к исходной переменной: $\left|x^2-5x+6\right|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=6 \\ x^2-5x+6=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5. \end{array}\right.$

Ответ: 0; 5.

7. Модуль в модуле.

При решении уравнения, в котором под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль, следует сначала освободиться от внутренних модулей, а затем в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.

Пример 11: $\left|x-|4-x|\right|-2x=4$

$\left|x-|4-x|\right|-2x=4 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x\ge 0, \\ \left|x-(4-x)\right|-2x=4; \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x<0, \\ \left|x+(4-x)\right|-2x=4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 4, \\ |2x-4|=4+2x; \end{cases} \\ \begin{cases} x>4, \\ |4|=4+2x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 4, \\ 2x-4\ge 0 \\ 2x-4=4+2x; \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 4, \\ 2x-4<0, \\ -(2x-4)=4+2x; \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} x>4, \\ x=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 4, \\ x\ge 2, \\ -4=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 4, \\ x<2, \\ -4x=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

На промежутке $[4;+\infty)$ решений нет. Единственный корень из промежутка $(-\infty;2)$ $x=0$.

Ответ: 0

8. Неравенства вида: $|f(x)|<a$

$|f(x)|<a$, $a>0$ $\quad |f(x)|<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<a, \\ f(x).-a. \end{cases} \Leftrightarrow -a<f(x)<a.$

Пример 12: $|2x-3|<5$

$|2x-3|<5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3<5, \\ 2x-3>-5. \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<4.$

Ответ: $(-1;4)$.

9. Неравенства вида: $|f(x)|\le\varphi(x)$

$|f(x)| \le \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le \varphi(x) \\ f(x) \ge -\varphi(x), \end{cases} \Leftrightarrow -\varphi(x) \le f(x) \le \varphi(x)$.Говорят «внутренность» точек -$\varphi(x)$ и $\varphi(x)$.

Пример 13: $|x-6| < x^2 - 5x + 9$

$$|x-6| < x^2-5x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 < x^2-5x+9, \\ x-6 > -(x^2-5x+9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+15>0, \\ (x-1)(x-3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

Пример 14: $|1+4x-x^2| \le 1-2x$ $|1+4x-x^2| \le 1-2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4x-x^2 \le 1-2x(1) \\ 1+4x-x^2 \ge 2x-1(2) \end{cases} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \le x \le 0$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2-6x \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 6 \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2-2x-2 \le 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \le x \le 1+\sqrt{3}$$

Ответ: $[1-\sqrt{3};0]$.

10. Неравенства вида $|f(x)| > \varphi(x)$

$|f(x)| > \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \varphi(x), \\ f(x) < -\varphi(x). \end{array}\right.$ Говорят «внешность» точек: -$\varphi(x)$ и $\varphi(x)$.

Пример 15: $|1+4x-x^2| \ge 1-2x$

$$|1+4x-x^2| \ge 1-2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+4x-x^2 \ge 1-2x \\ 1+4x-x^2 \le 2x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x \le 0 \\ x^2-2x-2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 6 \\ x \le 1-\sqrt{3} \\ x \ge 1+\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1-\sqrt{3} \\ x \ge 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;1-\sqrt{3}]\cup[0;+\infty)$.

Пример 16: $|x^2-4| > -2x-1$

$$\left|x^2-4\right|>-2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4>-2x-1, \\ x^2-4<2x+1. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+3)>0, \\ \left(x-1+\sqrt{6}\right)\left(x-1-\sqrt{6}\right)<0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \\ 1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ 1-\sqrt{6}<x<1 \\ 1<x<1+\sqrt{6} \\ x>1+\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup\left(1-\sqrt{6};1\right)\cup\left(1;1+\sqrt{6}\right)\cup\left(1+\sqrt{6};+\infty\right)$.

11. Неравенства вида: $|f(x)|\geq|\varphi(x)|$

$$|f(x)|\geq|\varphi(x)| \Leftrightarrow f^2(x)\geq\varphi^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)-\varphi^2(x)\geq 0\Leftrightarrow (f(x)-\varphi(x))(f(x)+\varphi(x))\geq 0$$

$$|f(x)|\leq|\varphi(x)|\Leftrightarrow|\varphi(x)|\geq|f(x)|\Leftrightarrow(\varphi(x)-f(x))(\varphi(x)+f(x))\geq 0$$

Пример 17: $|2x-1|>|x+2|$

$$|2x-1|>|x+2| \Leftrightarrow (2x-1-(x+2))(2x-1+x+2)>0\Leftrightarrow(x-3)(3x+1)>0 \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{1}{3} \\ x>3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(3;+\infty)$.

Пример 18: $|x|<|x-1|$

$$|x|<|x-1| \Leftrightarrow|x-1|>|x|\Leftrightarrow(x-1-x)(x-1+x)>0\Leftrightarrow(2x-1)<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

12. Неравенства с несколькими модулями.

Решение неравенств с несколькими модулями строится аналогично решению подобных уравнений.

То есть весь порядок решения сохраняется, лишь на заключительном этапе после освобождения от модулей решаем не уравнения, а неравенства.

Пример 19: $|-x-1|+|4-x|<7$

$$|-x-1|+|4-x|<7 \Leftrightarrow|x+1|+|x-4|<7$$

Корни подмодульных выражений: $x=-1; x=4$ - -   -1   - +   4   + +   x

Далее решение строим последовательно на интервалах, двигаясь слева направо по числовой оси.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\-x-1-x+4<7\end{cases}\\\begin{cases}-1\le x\le 4\\x+1-x+4<7\end{cases}\\\begin{cases}x>4\\x+1+x-4<7\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\x>-2\end{cases}\\\begin{cases}-1\le x\le 4\\5<7\end{cases}\\\begin{cases}x>4\\x<5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<-1\\-1\le x\le 4\\4<x<5\end{array}\right.$$

На промежутке $x[-1;4]$ мы получили верное числовое неравенство. Это означает, что для любого x из данного промежутка неравенство верно.

После объединения полученных множеств: -2<x<5

Ответ: (-2;5).

Пример 20: $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$

$(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$ Корни подмодульных выражений: $x=-2; x=1$ - - -2 - + 1 + +

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\(-x+1-3)(-x-2-5)<0;\end{cases}\\\begin{cases}-2\le x\le 1\\(-x+1-3)(x+2-5)<0;\end{cases}\\\begin{cases}x>1\\(x-1-3)(x+2-5)<0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\(x+2)(x+7)<0;\end{cases}\\\begin{cases}-2\le x\le 1\\(x+2)(x-3)>0;\end{cases}\\\begin{cases}x>1\\(x-4)(x-3)<0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-7<x<-2\\3<x<4\end{array}\right.$$

Ответ: $(-7;-2)\cup(3;4)$.

13. Введение новой переменной.

Пример 21: $x^2-2|x|<3$

$x^2-2|x|<3$. Сделаем замену: $|x|=y, y\ge 0$

$y^2-2y-3<0$ Решение: -1<y<3. С учетом ограниченности y: $0\le y\le 3$.

Вернемся к переменной x: $0\le |x|\le 3$. Решение: $\left[\begin{array}{l}x\le 3,\\x\ge -3;\end{array}\right.\Leftrightarrow -3\le x\le 3$

Ответ: $[-3;3]$

14.Модуль в модуле.

Пример 22: $||x|-1|<1-x$

$$||x|-1|<1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-1|<1-x,\\ x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}|-x-1|<1-x,\\ x<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x-1<1-x,\\ x-1>-(1-x);\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x+1<1-x,\\ x+1>-(1-x);\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x<1,\\ -1>-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ 1>-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Выражение -1>-1 –ложь, поэтому первая система решения не имеет. Решение - $x \in (-\infty;0)$.Ответ: $(-\infty;0)$.

Тренировочная работа по теме « Уравнения и неравенства с модулем»

$|x^2-x-1|=1\{-1;0;1;2\}$

$|x^2-4x|=4\{2;2+\sqrt{8};2-\sqrt{8}\}$

$(x+2)^2=2|x+2|+3\{-5;1\}$

$x|x|+8x-7=0\{-4+\sqrt{23}\}$

$|x-2|x-6x+8=0\{-2\pm 2\sqrt{3};4+2\sqrt{2}\}$

$x^2-\dfrac{5x}{x-2}|x-2|-14=0\{\pm 7\}$

$|3x-1|=\dfrac{1}{4x-1}\left\{\dfrac{7}{12}\right\}$

$|x+3|=x^2+x-6\{\pm 3\}$

$x^2-4|x+1|+5x+4=0\{-8;-1;0\}$

$|x^3-x|=x+4\{2;-\sqrt[3]{4}\}$

$x^2+4|x-3|-7x+11=0\left\{\dfrac{11-\sqrt{29}}{2};\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

$|x^2+x-1|=2x-1\left\{\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right\}$

$|x-2|-3|3-x|+x=0\left\{\dfrac{11}{5};7\right\}$

$|x^2-9|+|x-3|=6\left\{-3;2;\dfrac{-1+\sqrt{73}}{2}\right\}$

$|x|-2|x+1|+3|x+2|=0\{-2\}$

$|x|+|3x+2|+|2x-1|=5\left\{-1;\dfrac{2}{3}\right\}$

$|x+3|-|5-2x|=2-3x\{-1\}$

$|4-x|+|2x-2|=5-2x\{1\}$

$|x^2-3x+2|+|x^2-5x+6|=2\{1;3\}$

$|x^2-4x+3|+\left|x^2-5x+6=1\left\{2;\dfrac{5}{2};\dfrac{9+\sqrt{17}}{4}\right\}\right|$

$\left|x^2+5x\right|<6\left(-6;-3\right)\cup\left(-2;1\right)$

$\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\le 1\left[0;+\infty\right)$

$\left|x^2-6x+8\right|<5x-x^2\left(\dfrac{11-\sqrt{57}}{4};\dfrac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$

$2\left|x+1\right|\ge x-1\left(x\in R\right)$

$\left|3x-5\right|>9x+1\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$

$x^2-x-2<\left|5x-3\right|\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$

$\left|x^2+3x\right|\ge 2-x^2\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

$\left|x^2-3x\right|\ge x+5\left(-\infty;-1\right]\cup\left[5;+\infty\right)$

$\left|x^3-1\right|\ge 1-x\left(-\infty;-1\right]\cup\left[0;+\infty\right)$

$\left|x^2+x-2\right|>\left|x+2\right|\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

$\left|x+2\right|<\left|x-2\right|\left(-\infty;0\right)$

$\left|3+x\right|\ge\left|x\right|\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

$\left|3x-2\right|x<1\left(-\infty;1\right)$

$2\left|x-3\right|+\left|x+1\right|\le 3x+1\left[\dfrac{3}{2}+\infty\right)$

$\left|x\right|-2\left|x+1\right|+3\left|x+2\right|\ge 4\left(-\infty;-4\right]\cup\left[-1;+\infty\right)$

$\left|x+1\right|-\left|x-1\right|>1\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

$x^2+\left|5x-4\right|-1\le\left|3x-2\right|\left[-4-\sqrt{11};1\right]$

$\dfrac{\left|4-x\right|-x}{\left|x-6\right|-2}>2\left(4;6\right)\cup\left(6;8\right)$

$\left|x-4\right|\left(x+2\right)\ge 4x\left[-4;2\right]\cup\left[3+\sqrt{17};+\infty\right)$

3. Системы уравнений.

1.Способ подстановки.

Если хотя бы одно из уравнений системы позволяет выразить одну переменную через другую , то применяют способ подстановки.

Пример 1: $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y^2-1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2=x+5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x+4}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2=x+5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=x+4, \\ y^2=x+5; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=4, \\ y=-3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4;3);(4;-3)$.

2.Способ преобразования.

Пример 2: $\begin{cases} x^2+y^2-x=2, \\ (x-1)(y+3)=2x^2-x-1; \end{cases}$

Преобразуем второе уравнение: $(x-1)(y+3)=2x^2-x-1$

Разложим правую часть (квадратный трехчлен): $(x-1)(y+3)=(2x+1)(x-1)$

Соберем все в левой части и вынесем множитель $(x-1)$ за скобки:

$(x-1)(y+3-2x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(y-2x+2)=0$

$$a)\begin{cases} x=1, \\ x^2+y^2-x=2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=\sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=-\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$b)\begin{cases} y=2x-2, \\ x^2+y^2-x=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-2, \\ x^2+(2x-2)^2-x=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9+\sqrt{41}}{10}, \\ x=\dfrac{9-\sqrt{41}}{10}; \end{array}\right. \\ y=2x-2; \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{9+\sqrt{41}}{10}, \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{9-\sqrt{41}}{10}, \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{9+\sqrt{41}}{10};\dfrac{-1+\sqrt{41}}{5}\right);\left(\dfrac{9-\sqrt{41}}{10};\dfrac{-1-\sqrt{41}}{5}\right)$

3. Способ алгебраического сложения.

Пример 3: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0; \end{cases}$

Наличие квадратов обеих переменных, а также их удвоенного произведения позволяет выделить полный квадрат. Сложим уравнения системы:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0, \\ x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Подстановкой во второе уравнение убеждаемся, что $(1;1)$ - решение системы.

Ответ: $(1;1)$.

Пример 4: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 17 = 0; \end{cases}$

Если умножить первое уравнение на 2 , а затем вычесть одно уравнение из другого, то мы избавимся от квадратов переменных.

$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 18 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 17 = 0; \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое: $x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$

Подставим в первое уравнение $x^2(x+1)^2 - 2x + 3(x+1) - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2{,}5 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1{,}5 \\ y = -2{,}5 \end{array}\right.$

Ответ : $(1;2);(-2{,}5;-1{,}5)$.

Пример 5 : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20; \end{cases}$

Если домножить второе уравнение на 3 и сложить с первым, то можно будет выделить куб суммы.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ 3x^2y + 3xy^2 = 60; \end{cases} + \begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 125, \\ xy(x+y) = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 125, \\ xy(x+y) = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4;1);(1;4)$.

4. Способ умножения и деления.

Пример 6: $\begin{cases} (x+y)xy = 120, \\ (x-y)xy = 30; \end{cases}$

Разделим первое уравнение на второе.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 4, \\ (x-y)xy = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4(x-y), \\ (x-y)xy = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4x+4y = 0, \\ (x-y)xy = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 3x, \\ (x-y)xy = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x}{5}, \\ \left(x - \dfrac{3x}{5}\right)x + \dfrac{3x}{5} \end{cases}$$

Решая второе уравнение, получим значение $x = 5$, тогда $y = 3$

Ответ: $(5;3)$.

Пример 7: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x+y) = -2; \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x+y) = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 7, \\ xy(x+y) = -2; \end{cases}$ Разделим первое уравнение на второе:

$\dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy} = -\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{xy} - \dfrac{xy}{xy} + \dfrac{y^2}{xy} = -\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x} = \dfrac{-7}{2}$. Сделаем замену: $\dfrac{x}{y} = t$ и решим

уравнение: $t + \dfrac{1}{t} = -\dfrac{7}{2} + 1 \Leftrightarrow t + \dfrac{1}{t} = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$

$$t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2y, \\ x^3 + y^3 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y, \\ y^3 = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

$$t = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x, \\ x^3 + y^3 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x, \\ x^3 = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(2;-1);(-1;2)$.

Пример 8: $\begin{cases} (x+y)(x^2 - y^2) = 9, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5; \end{cases}$

Сделаем следующую замену: $y = xt, t \neq 0$

$\begin{cases} (x+xt)(x^2 - x^2t^2) = 9, \\ (x-xt)(x^2 + x^2t^2) = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(1+t)(1-t^2) = 9, \\ x^3(1-t)(1+t^2) = 5. \end{cases}$ Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{(1+t)(1-t^2)}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{9}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ x^3 = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1);(-1;-2)$.

6. Способ введения новой переменной.

Обычно замена: $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v; \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=u, \\ \dfrac{x}{y}=v \end{cases}$

Пример 9: $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20; \end{cases}$

Замена: $\begin{cases} x+y=u, \\ \dfrac{x}{y}=v \end{cases}$ Тогда: $\begin{cases} u+v=9, \\ u\cdot v=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4, \\ v=5; \end{cases} \begin{cases} u=5, \\ v=4. \end{cases}$ Откуда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{10}{3}, \\ y=\dfrac{2}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ : $(4;1), \left(10/3; 2/3\right)$.

Пример 10: $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144, \\ x^2+4x+5y=24; \end{cases}$

$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144, \\ x^2+4x+5y=24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(3x+5y)=144, \\ x^2+x+3x+5y=24; \end{cases}$ Замена : $\begin{cases} x^2+x=u, \\ 3x+5y=v; \end{cases}$

$\begin{cases} u\cdot v=144, \\ u+v=24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=12, \\ v=12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=12, \\ 3x+5y=12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-4; \end{array} \right. \\ 3x+5y=12; \end{cases}$

Ответ: $\left(3; \dfrac{3}{5}\right), \left(-4; \dfrac{24}{5}\right)$.

Пример 11: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7; \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ x+2y+x-y+2=9. \end{cases}$ Замена : $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=u, \\ \sqrt[3]{x-y+2}=v; \end{cases}$

$\begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=9 \end{cases}$ Делим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} u^2-uv+v^2=3, \\ u+v=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v, \\ (3-v)^2-(3-v)v+v^2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v, \\ \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v=1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1, \\ v=2 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2, \\ v=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a)\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=1 \\ \sqrt[3]{x-y+2}=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x-y+2=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=2, \\ \sqrt[3]{x-y+2}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=8, \\ x-y+2=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ : $\left(\dfrac{13}{3};\dfrac{-5}{3}\right);(2;3)$.

Симметрические системы.

Это системы , которые не меняются при замене X на Y и Y на X. Для таких систем удобна замена :

$\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$ Полезны следующие представления : $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=u(u^2-3v)$ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2$

Пример 12 : $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8, \\ x^3+y^3+x^2y+y^2x=15; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8, \\ x^3+y^3+x^2y+y^2x=15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy+(x+y)=8, \\ (x+y)((x+y)^2-3xy)+xy(x+y)=15 \end{cases}$$ Замена : $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v; \end{cases}$

$$\begin{cases} u^2-2v+u=8, \\ u(u^2-3v)+uv=15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v=8-u^2-u, \\ u(u^2-2v)=15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v=8-u^2-u, \\ \left[\begin{array}{l} u=3 \\ u=5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=5, \\ v=11; \end{cases} \\ \begin{cases} u=3, \\ v=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5, \\ xy=11; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ : $(1;2);(2;1)$.

7. Применение однородных уравнений при решении систем уравнений.

Пример 13 : $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5; \end{cases}$

Первое уравнение однородно : $x \neq 0, y \neq 0$ Замена : $\dfrac{x}{y}=t.$ $\quad t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{13}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{3}, \\ t=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

$a)\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}, \\ x+y=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2y, \\ x+y=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ x+y=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3y, \\ x+y=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

Ответ : $(2;3);(3;2)$.

Пример 14 : $\begin{cases} \dfrac{x}{y}\left(x^2-2y^2\right)=4, \\ \dfrac{y}{x}\left(x^2+2y^2\right)=3; \end{cases}$

Замена : $\dfrac{x}{y}=t, x=yt$: $\begin{cases} t\left(y^2t^2-2y^2\right)=4, \\ \dfrac{1}{t}\left(y^2t^2+2y^2\right)=3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ty^2\left(t^2-2\right)=4, \\ \dfrac{y^2}{t}\left(t^2+2\right)=3. \end{cases}$ Делим первое уравнение на второе

$$\frac{t^2\left(t^2-2\right)}{t^2+2}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3t^4-10t^2-8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=4, \\ t^2=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=2. \end{array}\right.$$

$a)\begin{cases} x=2y, \\ \dfrac{x}{y}\left(x^2-2y^2\right)=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ y^2=1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad b)\begin{cases} x=-2y, \\ \dfrac{x}{y}\left(x^2-2y^2\right)=4. \end{cases}$ Система решений не имеет.

Ответ : $(2;1);(-2;-1)$.

8. Системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Линейные системы .

Пример 15 : $\begin{cases} y+z=3, \\ z+x=-5, \\ x+y=4. \end{cases}$

Сложим все три уравнения : $2x+2y+2z=2 \Leftrightarrow x+y+z=1$

Вычтем из полученного уравнения 1-ое уравнение : $x+y+z-(y+z)=1-3 \Leftrightarrow x=-2$

Вычтем из полученного уравнения 2-ое уравнение : $x+y+z-(z+x)=1-(-5) \Leftrightarrow y=6$

Вычтем из полученного уравнения 3-е уравнение : $x+y+z-(x+y)=1-4 \Leftrightarrow z=-3$

Ответ : $(-2;6;-3)$.

Нелинейные системы.

Пример 16 : $\begin{cases} yz=4, \\ xz=3, \\ xy=27; \end{cases}$

Выразим из первого уравнения Y через Z , из второго X через Z и поставим в третье уравнение.

$$\begin{cases} y=\frac{4}{z}, \\ x=\frac{3}{z}, \\ \frac{12}{z^2}=27; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 6, \\ x=\pm 4{,}5, \\ z=\pm\frac{2}{3} \end{cases} \text{Ответ : } \left(\pm 4{,}5;\pm 6;\pm\frac{2}{3}\right).$$

Пример 17 : $\begin{cases} x(y+z)=27, \\ y(x+z)=32, \\ z(x+y)=35; \end{cases}$

Раскроем скобки. Сложим все три уравнения, Поочередно вычтем 1-ое , 2-ое , 3-е уравнения.

$\begin{cases} xy=12, \\ xz=15, \\ yz=20; \end{cases}$ Выразим : из 1-го Y через X , из 2-го Z через X и подставим в 3-е уравнение.

$$\begin{cases} y=\frac{12}{x}, \\ z=\frac{15}{x}, \\ \frac{12\cdot 15}{x^2}=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 4, \\ x=\pm 5. \end{cases} \text{Ответ : } (\pm 3;\pm 4;\pm 5).$$

Пример 19 : $\begin{cases} 2xy+y+2x=15, \\ yz+y+z=11, \\ 2xz+z+2x=26; \end{cases}$

Прибавим к обеим частям каждого уравнения по единице – это позволит разложить левые части на множители.

$$\begin{cases}2xy+y+2x+1=16,\\ yz+y+z+1=12,\\ 2xz+z+2x+1=27;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x+1)(y+1)=16,\\ (y+1)(z+1)=12,\\ (2x+1)(z+1)=27;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1=u,\\ y+1=v,\\ z+1=t;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}uv=16,\\ vt=12,\\ ut=27;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\pm 6,\\ v=\pm\dfrac{8}{3},\\ t=\pm\dfrac{9}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\ y=\dfrac{5}{3},\\ z=\dfrac{7}{2}\end{cases} \begin{cases}x\\ y\\ z\end{cases}$$

Ответ : $\left(\frac{5}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right);\left(-\frac{7}{2};-\frac{11}{3};-\frac{11}{2}\right)$.

Пример 20 : (по формулам Крамера)

$$\begin{cases}x-3y-2z=2,\\ 2x+y+5z=17,\\ 3x-y-2z=2.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\ 2 & 1 & 5\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$1\cdot 1\cdot(-2)+(-3)\cdot 5\cdot 3+2\cdot(-1)\cdot(-2)-((-2)\cdot 1\cdot 3+5\cdot(-1)\cdot 1+(-3)\cdot 2\cdot(-2))=-44$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -3 & -2\\ 17 & 1 & 5\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot(-2)+(-3)\cdot 5\cdot 2+17\cdot(-1)\cdot(-2)-((-2)\cdot 1\cdot 2+5\cdot(-1)\cdot 2+17\cdot(-3)\cdot(-2))=-$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 17 & 5\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=1\cdot 17\cdot(-2)+2\cdot 5\cdot 3+2\cdot 2\cdot(-2)-((-2)\cdot 17\cdot 3+5\cdot 2\cdot 1+2\cdot 2\cdot(-2))=88$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 17\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot 2+(-3)\cdot 17\cdot 3+2\cdot(-1)\cdot 2-(2\cdot 1\cdot 3+17\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot(-3)\cdot 2)=-132$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-88}{-44}=2;\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{88}{-44}=-2;\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-132}{-44}=3$$

Ответ : $(2;-2;3)$.

Тренировочные задания по теме « Системы уравнений».

$\begin{cases} x+y^2=2, \\ 2y^2+x^2=3; \end{cases}$ $(1;-1)(1;1)$

$\begin{cases} 2x^2-3xy+5y=5, \\ (x-2)(y-1)=0; \end{cases}$ $(2;3)(0;1)(1{,}5;1)$

$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=9, \\ 4x^2+xy+4y^2=18; \end{cases}$ $(2;-1)(-1;2)(-2;1)(1;-2)$

$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$ $(3;2)(2;3)(-3;-2)(-2;-3)$

$\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ $(5;2)(-2;-5)$

$\begin{cases} x^2-x+1=y, \\ y^2-y+1=x; \end{cases}$ $(1;1)$

$\begin{cases} 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0, \\ x^2+y^2-4x-3y+5=0; \end{cases}$ $(3;1)(1;2)$

$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=28, \\ x^2+3xy-3y^2=28; \end{cases}$ $(4;2)(-4;-2)$

$\begin{cases} x^3-y^3=19, \\ xy(x-y)=6; \end{cases}$ $(3;2)(-2;-3)$

$\begin{cases} x+y=3, \\ x^3+x^2y=12; \end{cases}$ $(2;1)(-2;5)$

$\begin{cases} xy^3+x^3y=-10, \\ x^2y^4+x^4y^2=20; \end{cases}$ $(2;-1)(-2;1)(1;-2)(-1;2)$

$\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2-xy=2; \end{cases}$ $(2;1)(-2;-1)$

$\begin{cases} (x+y)^3(x-y)^2=27, \\ (x-y)^3(x+y)^2=9; \end{cases}$ $(2;1)$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$ $(2;3)(-2;-3)(-2;3)(2;-3)$

$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ xy=8; \end{cases}$ $(8;1)(1;8)$

$\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x+xy+y=9; \end{cases}$ $(4;1)(1;4)$

4. Иррациональные уравнения и неравенства.

Уравнения и неравенства , в которых неизвестное входит в рациональные функции , стоящие под знаком радикала , называются иррациональными .

При преобразовании иррациональных выражений нужно помнить , что

$$\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|; \quad f(x)\cdot\sqrt{g(x)} = \begin{cases} \sqrt{f^2(x)\cdot g(x)}, f(x) \geq 0 \\ -\sqrt{f^2(x)\cdot g(x)}, f(x) < 0; \end{cases},$$

При решении иррациональных уравнений нужно в первую очередь избавиться от радикалов и перейти к обычным алгебраическим уравнениям . Для этой цели существует несколько способов .

Обычно иррациональные уравнения решают способом исключения радикалов путем возведения в степень . При этом способе решения применяются неэквивалентные преобразования , расширяющие

Область допустимых значений и ведущие к появлению посторонних корней . Поэтому в ходе решения необходимо внимательно следить за равносильностью преобразований , или в конце решения делать проверку путем подстановки полученных корней в исходное уравнение .

1.Уравнения вида : $\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$

Пример 1 : $\sqrt{x+3} = 1$

Обе части уравнения равносильны , возведем в квадрат.

$x+3=1, \Rightarrow x=-2$

Ответ : -2

Пример 2 : $\sqrt{x+3} = -1$

Нарушена равносильность : левая и правая части разных знаков.

Ответ : решения нет

Пример 3 : $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$

$$\sqrt{1+4x-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 1+4x-x^2 = (x-1)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ : 3

Пример 4 : $\sqrt{-3x+3} - x = -1$

$$\sqrt{-3x+3}-x=-1 \Leftrightarrow \sqrt{-3x+3}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ -3x+3=(x-1)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2; \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ : 1

2. Уравнения вида : $\sqrt{f(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ \varphi(x)\ge 0, \\ f(x)=\varphi(x). \end{cases}$$

Пример 5 : $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$

$$\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x\ge 0, \\ x^2+x-3\ge 0, \\ x^2+x-3=1-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4; \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ : -4

Пример 6 : $\sqrt{x}=\sqrt{-x-1}$`

Найдем О.Д.З. : $\begin{cases} x\ge 0, \\ -x-1\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x\le -1. \end{cases}$ Нет общих решений.

Ответ : нет решений.

3. Уравнения вида : $g(x)\sqrt{f(x)}=0$

$$g(x)\sqrt{f(x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)=0, \\ f(x)\ge 0, \end{cases} \\ \sqrt{f(x)}=0; \end{array}\right.$$

Пример 7 : $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0$

$$(16-x^2)\sqrt{3-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16-x^2=0, \\ 3-x\ge 0, \end{cases} \\ \sqrt{3-x}=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=4 \end{array}\right. \\ x\le 3, \end{cases} \\ x=3; \end{array}\right.$$

Ответ : -4; 3

Пример 8 : $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$

Перенесем $(2x-6)$ в левую часть и вынесем $(x-3)$ за скобки

$$(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6 \Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{x^2-5x+4}-2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ \sqrt{x^2-5x+4}=2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=0, \\ x=5; \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ : 0; 5.

4. Уравнения вида : $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \varphi(x)$

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=c$$

Пример 9 : $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\ge 0, \\ 4x+1\ge 0, \\ \left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}\right)^2=16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{3}{2}, \\ 2x-3+2\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{4x+1}+4x+1=16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=18 \\ x\ge \dfrac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{3}{2}, \\ 9-3x\ge 0, \\ (2x-3)(4x+1)=(9-3x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}\le x\le 3, \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=42. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ : 2

5. Уравнения вида : $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$

Пример 10 : $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$

$$\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5\ge 0, \\ x+2\ge 0, \\ 2x+1\ge 0, \\ \left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{2}, \\ 3x-3+2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2}=2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{2}, \\ 2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2}=4-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{2}, \\ 4-x\ge 0, \\ 4(2x-5)(x+2)=(4-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5\le x\le 4 \\ 7x^2+4x-56=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5\le x\le 4 \\ x=\dfrac{-2\pm 6\sqrt{11}}{7} \end{cases}$$

Ответ : $\dfrac{-2+6\sqrt{11}}{7}$.

Пример 11 : $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$

Найдем О.Д.З. : $\begin{cases} 11x+3\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \\ 9x+7\ge 0, \\ x-2\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{11}, \\ x\le 2, \\ x\ge -\dfrac{7}{9}, \\ x\ge 2; \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Подстановкой убеждаемся , что X=2 –корень .

Ответ : 2

Пример 12 : $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$

Разложим квадратные трехчлены , стоящие под знаками радикалов на множители

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4x+1)}-\sqrt{(x+1)(2x-1)}=\sqrt{(x+1)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ \sqrt{4x+5}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=0; \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x+5\ge 0, \\ 2x-1\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ \left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{2x-1}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2, \end{cases} \\ x=-1;; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -\dfrac{5}{4} \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ 2\sqrt{4x+5}\sqrt{2x-1}=5x+5, \end{cases} \\ x=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -\dfrac{5}{4} \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ 5x+5\ge 0, \\ 4(4x+5)(2x-1)=25x^2+50x+25 \end{cases} \\ x=-1; \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -\dfrac{5}{4} \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=5, \\ x=-\dfrac{9}{7}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ : -1; 5.

6. Способ введения новой переменной.

Пример 13 : $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$

Пусть $\sqrt{x^2+3x-6}=t, t\ge 0; x^2+3x-18=t^2-12$

$t^2-12+4t=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-6 \end{array}\right.$ $t=-6$ не удовлетворяет условию : $t\ge 0$, то есть $\sqrt{x^2+3x-6}=2$. Откуда корни $x=-5; x=2$

Ответ : -5; 2.

Пример 14 : $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$

О.Д.З.: $\begin{cases} x+4\ge 0, \\ x-4\ge 0, \\ x^2-16\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \{x\ge 4.$

Пусть $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=t, t\ge 0$ Возведем обе части в квадрат : $2x+2\sqrt{x^2-16}=t^2$.Решим уравнение :

$\dfrac{t}{2}=\dfrac{t^2}{2}-6, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=4 \end{array}\right.$ $t=-3$ не удовлетворяет условию $t\ge 0$ Поэтому : $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ 2x+2\sqrt{x^2-16}=16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ \sqrt{x^2-16}=8-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ 8-x\ge 0, \\ x^2-16=64-16x+x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\le x\le 8 \\ x=5. \end{cases}$

Ответ : 5

7. Уравнения вида : $\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[n]{g(x)}=\varphi(x); \sqrt{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=\varphi(x); \sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=\varphi(x)$

Удобно решать путем введения вспомогательных неизвестных и последующего перехода к рациональной системе.

Пример 15 : $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

Решение : Положим $\sqrt[3]{x-2}=u; \sqrt{x+1}=v$ Тогда получаем систему : $\begin{cases} u+v=3, \\ u^3-v^2=x-2-x-1; \end{cases}$

Подставляя во второе уравнение $v=3-u$, получаем $u^3-u^2+6u-6=0 \Leftrightarrow (u^2+6)(u-1)=0$

Откуда : $u=1$, то есть $x=3$.

Ответ : 3

Пример 16 : $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$

Решение : Введем новые переменные $: u=\sqrt[3]{12-x}; v=\sqrt[3]{14+x}$ Тогда : $u^3+v^3=12-x+14+x$

$$\begin{cases} u+v=2, \\ u^3+v^3=26; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v, \\ v^2-2v-3=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v, \\ \left[\begin{array}{l} v=-1 \\ v=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15 \\ x=13. \end{array}\right.$$

Ответ : -15; 13

Пример 17 : $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

Решение : Пусть $\sqrt[3]{7-x}=u, \sqrt[3]{x-5}=v$ Тогда можно получить систему : $\begin{cases} \dfrac{u-v}{u+v}=\dfrac{u^3-v^3}{2}, \\ u^3+v^3=2; \end{cases}$

Эта система распадается на две системы : $\begin{cases} u-v=0, \\ u^3+v^3=2; \end{cases} \Leftrightarrow u=v=1 \Rightarrow x=6;$

$$\begin{cases} (u+v)(u^2+uv+v^2)=2, \\ u^3+v^3=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\sqrt[3]{2}, \\ v=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0, \\ v=\sqrt[3]{2}. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=7. \end{array}\right.$$

Ответ : 5 ; 6 ; 7.

8. Умножение на сопряженное выражение.

Пример 18 : $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$

О.Д.З.: $\begin{cases} 21+x\ge 0, \\ 21-x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow -21\le x\le 21.$ Умножим числитель и знаменатель дроби в левой части на выражение , сопряженное знаменателю, то есть на : $\left(\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}\right)$

$$\frac{21+\sqrt{21-x}\sqrt{21+x}}{x}=\frac{21}{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 21-x=0, \\ 21+x=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-21 \\ x=21. \end{array}\right.$$

Ответ : $\pm 21.$

Пример 19 : $\left(\sqrt{1+x}+x\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$

О.Д.З.: $1+x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1.$ Умножим обе части на : $\left(\sqrt{1+x}-1\right)$

$$x\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x\left(\sqrt{1+x}-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{x+1}-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 2x-5=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Сделаем проверку : $x=0$ корнем не является.

Ответ : 2

Пример 20 : $\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2\sqrt{x}-x}$

О.Д.З. $\begin{cases} x \ge 0, \\ 2-\sqrt{x} \ne 0, \\ 2\sqrt{x}-x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 4. \end{cases}$ Умножим обе части на $\left(2\left(2\sqrt{x}-x\right)\right)$, получим :

$$4\sqrt{x}+2\sqrt{x}-x=8 \Leftrightarrow 6\sqrt{x}=8+x \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t, t \ge 0, \\ t^2-6t+8=0, \\ t=2; t=4. \end{array} \right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=2, \\ \sqrt{x}=4; \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=16. \end{array} \right.$$ С учетом О.Д.З.

Ответ : 16.

9. Применение однородных уравнений :

Пример 21 : $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$

$x=0$ не является корнем уравнения . Делим на $x^2 \ne 0$

О.Д.З. : $x \ge -1$; $1+\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}-\dfrac{2(x+1)}{x^2}=0$. Замена $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=t$ приводит данное уравнение к виду: $2t^2-t-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=1, \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=-\dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x+1=x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ 4x+4=x^2. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ x=2-2\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Ответ : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 2-2\sqrt{2}$

Пример 22 : $\sqrt[5]{x^2+1+2x}+3\sqrt[5]{x^2+1-2x}=4\sqrt[5]{x^2-1}$

$$\sqrt[5]{x^2+1+2x}+3\sqrt[5]{x^2+1-2x}=4\sqrt[5]{x^2-1} \Leftrightarrow \sqrt[5]{(x+1)^2}+3\sqrt[5]{(x-1)^2}=4\sqrt[5]{(x+1)(x-1)}$$

$x=1$ не является корнем , делим на $\sqrt[5]{(x-1)^2}$

$\sqrt[5]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}+3=4\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ Замена : $\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}=t$ приводит данное уравнение к виду:

$$t^2+3=4t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}=1, \\ \sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}=3; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1}=1, \\ \dfrac{x+1}{x-1}=243; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[x=\dfrac{122}{121}. \right.$$

Ответ: $\frac{122}{121}$.

10. Приведение к квадрату двучлена под знаком радикала.

Пример 23: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

Замена: $\sqrt{x-1}=y, y\geq 0; x=y^2+1$, тогда решим уравнение: $\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1$

$\sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1 \Leftrightarrow |y-2|+|y-3|=1 \Rightarrow 2\leq y\leq 3 \Rightarrow 2\leq \sqrt{x-1}\leq 3 \Rightarrow 5\leq x\leq 10$

Ответ: $[5;10]$.

11.Использование свойств , входящих под знак радикала функций

Среди иррациональных уравнений встречаются такие уравнения , которые не решаются указанными выше способами. При их решении нужно использовать свойства входящих в них функций : монотонность , ограниченность и другие.

Пример 24 : $(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2+7}+x\sqrt{x^2+7}=0$

Решение : рассмотрим функцию $f(x)=x\sqrt{x^2+7}$ Эта функция монотонно возрастает на всей области определения и является нечетной , так как $f(-x)=-f(x)$.Исходное уравнение можно записать в виде : $f(2x+1)+f(x)=0 \Leftrightarrow f(2x+1)=-f(x)=f(-x)$

В силу монотонности последнее равенство возможно , только если $2x+1=-x \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

Ответ : $-\frac{1}{3}$

12. Иррациональные неравенства вида : $\sqrt{f(x)}\leq \varphi(x)$

$$\sqrt{f(x)}\leq \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ \varphi(x)\geq 0, \\ f(x)\leq \varphi^2(x); \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)}<\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ \varphi(x)>0, \\ f(x)<\varphi^2(x); \end{cases}$$

Пример 25 : $\sqrt{x+18}<2-x$

$$\sqrt{x+18}<2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+18\geq 0, \\ 2-x>0, \\ x+18<(2-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -18, \\ x<2, \\ (x-7)(x+2)>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18\leq x<2, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>7 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ : $[-18;-2)$.

13. Иррациональные неравенства вида : $\sqrt{f(x)}\geq \varphi(x)$

$$\sqrt{f(x)} \ge \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) \ge \varphi^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) > \varphi^2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 26 : $\sqrt{x^2+x-2} > x$

$$\sqrt{x^2+x-2} > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2+x-2 > x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2+x-2 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x > 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$$

Ответ : $(-\infty;-2] \cup (2;+\infty)$.

14. Неравенства вида : $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}; \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

Пример 27 : $\sqrt{x^2-3x+1} \ge \sqrt{3x-4}$

$$\sqrt{x^2-3x+1} \ge \sqrt{3x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1 \ge 0, \\ 3x-4 \ge 0, \\ x^2-3x+1 \ge 3x-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{3}, \\ (x-5)(x-1) \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \ge 5$$

Ответ : $[5;+\infty)$.

15. Другие виды иррациональных неравенств.

Пример 28 : $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)\sqrt{x^2-x-2} = 0, \\ (x-1)\sqrt{x^2-x-2} > 0; \end{array}\right.$$

Решим сначала уравнение : $\begin{cases} x^2-x-2 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2-x-2=0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1; \end{array}\right. \end{cases}$

Решим неравенство : $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x^2-x-2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Ответ : $(2;+\infty) \cup \{-1\}$.

Пример 29 : $\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} > 4x-2$

О.Д.З. : $\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ 5x \ge 0; \end{cases} \Rightarrow x \ge 0$ Умножим обе части неравенства на положительное выражение

:

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}\right)$. Тогда

$$x+2-5x>(4x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}\right)\Leftrightarrow(4x-2)\left(1+\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2<0,\\ x\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{1}{2},\\ x\ge 0.\end{cases}$$

Ответ : $\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Тренировочные задания по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»

$\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}\{5\}$

$\sqrt{x^2-8}=\sqrt{-2x}\{-4\}$

$\sqrt{6x^2+2x-10}=\sqrt{x^2-x-2}\left\{-\dfrac{8}{5}\right\}$

$\sqrt{1-x}\sqrt{x}=x\{0;0,5\}$

$\sqrt{6-4x-x^2}=x+4\{-1\}$

$x+\sqrt{2x^2-14x+13}=5\{-2\}$

$\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5\{0;5\}$

$3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7\{6\}$

$\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}\{3\}$

$2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-10}=0\{2\}$

$\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}\{3\}$

$\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}\{4\}$

$\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}\{-2;1;13\}$

$2\sqrt{x^2-2x-8}-\sqrt{x^2-16}=\sqrt{3x^2-13x+4}\{4\}$

$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x\{-1\}$

$\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6-x}}=\dfrac{x}{6}\{-6;6\}$

$\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}\{19;84\}$

$\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0\{-4,5;3\}$

$x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x\{-4;2\}$

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16\{3\}$

$\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}}+\sqrt{2x+5}=2x\{5\}$

$\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4\{0\}$

$\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0\{2\}$

$\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2\{-15;13\}$

$\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3\{-2;5\}$

$\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6\{4\}$

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$

$\sqrt{x^2+5x}<\sqrt{1-x^2+4x}\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$

$\sqrt{x^2-3x-18}<4-x(-\infty;-3]$

$x+4>2\sqrt{4-x^2}\left[-2;-\dfrac{8}{5}\right)$

$\sqrt{x^2-5x-24}>x+2(-\infty;-3]$

$(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1(-1;+\infty)$

$(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\ge 0[-2;4]$

$\sqrt{x-6}-\sqrt{x+10}\le 1[6;\infty)$

$\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^2-5x+20}\ge 4(-\infty;1]\cup[4;\infty)$

Применение свойств функций к решению уравнений.

Всё чаще на экзаменах предлагаются задачи, решаемые с использованием свойств функций.

Для использования этого метода необходимо рассмотреть функциональный подход к понятию уравнения. Равенство $f(x) = g(x)$ называется уравнением относительно x, если ставится задача нахождения тех значений переменной x, при которых значения функции f равны соответствующим значениям функции g.

В общем случае задача "Найти корни уравнения" включает в себя решение двух других задач

- имеет ли уравнение корни
- сколько корней имеет уравнение.

Можно выделить следующие методы решения уравнений и неравенств, основанных на применении свойств функций

1. Сравнение областей определения
2. Сравнение областей значений.
3. Применение четности.
4. Симметричность функций
5. Применение монотонности

Подсказкой к применению свойств функций к решению уравнений может быть громоздкий вид уравнения.

I. Метод сравнения областей определения.

Уравнение $f(x) = g(x)$; $D = D(f) \cap D(g)$; X – множество решений уравнения.

1. Если область определения уравнения пустое множество, то уравнение не имеет корней. ($D = \acute{\varnothing} \Rightarrow X=\acute{\varnothing}$)

1) $\sqrt{5x - x^2 - 6} = 3^{\sqrt{x-\pi}} - \sqrt{1-3x}$

Найдем область определения

$$\begin{cases} 5x - x^2 - 6 \ge 0 \\ x - \pi \ge 0 \\ 1 - 3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ x \ge \pi \\ x \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

корней нет.

2. Если область определения уравнения является конечным множеством, то подставляем полученные числа в уравнение и проверяем истинность полученных равенств.

2) $\sqrt{|\sin x|} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + \text{tg } x$

$$\begin{cases} |\sin x| \ge 0 \\ -|\sin x| \ge 0 \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z$$

Ответ: $\pi n, n \in Z$

3) $3^{\sqrt{4-x^2}} = \lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)+3x-x^2+1$

ОДЗ $\begin{cases} 4-x^2 \ge 0 \\ x^2-4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Проверка: $x=2: 3^0=\lg 1+6-4+1, \quad 1=3$ (*ложь*)

$x=-2: 3^0=\lg 1-6-4+1, \quad 1=-9$ (*ложь*)

Ответ: $\varnothing$

4) $\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right)>0$

ОДЗ $\begin{cases} x^2-6x+5 \ge 0 \\ x>0 \\ 12x-2x^2-10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Проверка показывает, что $x=5$ *является корнем*

Ответ: 5

5) $\sqrt{1-x^2} > \lg(x-2)$

ОДЗ $\begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Ответ: $\varnothing$

6) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{8-x^3}=x-2$

ОДЗ $\begin{cases} x^2-4 \ge 0 \\ 8-x^3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Ответ: 2

7) $\sqrt{x-3}+\sqrt{5x-x^2-6}+\sqrt{2x+3}=3$

ОДЗ $\begin{cases} x-3 \ge 0 \\ 5x-x^2-6 \ge 0 \\ 2x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Ответ: 3

8) $2^{\sqrt{\cos x-1}}+\log_2\left(x^2+1\right)>\sin x+1$

ОДЗ: $\cos x-1 \ge 0 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=2\pi n$

Проверка: $x_n=2\pi n: 2^{\sqrt{\cos 2\pi n-1}}+\log_2\left(4\pi^2 n^2+1\right)>\sin(2\pi n)+1$

$1+\log_2\left(4\pi^2n^2+1\right)>0+1 \Leftrightarrow \log_2\left(4\pi^2n^2+1\right)>0 \Leftrightarrow 4\pi^2n^2>0$ (*истина при* $n\neq 0$)

Ответ: $2\pi n,\ n\neq 0,\ n\in Z$

9) *Укажите число целых решений неравенства*

$2^{\sqrt{x-4}}+8 \ge \log_2(2-x)$

ОДЗ $\begin{cases} x-4 \ge 0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Ответ: 0

II. Метод сравнения областей значений.

1. Если задано уравнение f(x) = g(x), и множества значений функций f(x) и g(x) не имеют общих элементов, то уравнение не имеет корней.

1) $\log_5(x^2 + 2x + 7) = - x^2 + 4x - 5$

$\log_5(x^2 + 2x + 7) = \log_5((x + 1)^2 + 6) \geq \log_5 6 > 1$

$- x^2 + 4x - 5 = - (x - 2)^2 - 1 \leq - 1$

Исходное равенство невозможно

Ответ: корней нет.

2. Оценка каждой из частей уравнения часто позволяет значительно упростить решение

2) $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 5| = x - 4$

Левая часть принимает лишь неотрицательные значения, значит, и правая часть должна быть неотрицательной.

$x \geq 4$ При $x \geq 4$ подмодульные выражения положительны

$x - 2 + x - 3 + 2x - 5 = x - 4$

$3x = 6$

$x = 2$ 2 не удовлетворяет неравенству $x \geq 4$

Корней нет.

3) $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+\sqrt{x+2}-x} < 4$

$\sqrt{1+\sqrt{x+2}-x} > \sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{1-x} - \sqrt{1+\sqrt{x+2}-x} < 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} - \sqrt{1+\sqrt{x+2}-x} < 4 \quad при\ x \in R$

$$ОДЗ: \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 1-x+\sqrt{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$Ответ: [-2;1]$

3. $F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots\ldots.. f_n(x)$

где $f_1(x), f_2(x)\ldots. f_n(x)$ *неотрицательны, тогда*

3. $F(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots.\ldots. \\ f_n(x)=0 \end{cases} \qquad F(x)\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots.\ldots. \\ f_n(x)=0 \end{cases}$

1) $x^4+5\cdot 4^x+4x^2\cdot 2^x-2\cdot 2^x+1=0$

$x^4+2\cdot x^2\cdot 2^{x+1}+2^{2x+2}-2^{2x+2}+4^x-2\cdot 2^x+1+4\cdot 4^x=0$

$$\left(x^2+2^{x+1}\right)^2+\left(2^x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2^{x+1}=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^2+2^1=0 (\textit{ложь}) \\ x=0 \end{cases}$$

Ответ: *нет корней*

2) $|x-3|+\left|\log_{0,7}\left(x^2-4x+4\right)\right|=0$

$$|x-3|+\left|\log_{0,7}\left(x^2-4x+4\right)\right|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \log_{0,7}\left(x^2-4x+4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Ответ: 3

3) $1-\sqrt{1-x^2-x^4}+\log_2\left(1+x^2\right)=0$

$1-x^2\le 1, \quad 0\le 1-x^2-x^4\le 1, \quad 0\le\sqrt{1-x^2-x^4}\le 1, \quad 1-\sqrt{1-x^2-x^4}\ge 0$

$x^2+1\ge 1, \quad \log_2\left(1+x^2\right)\ge 0$

$$1-\sqrt{1-x^2-x^4}+\log_2\left(1+x^2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{1-x^2-x^4}=0 \\ \log_2\left(1+x^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-\sqrt{1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Ответ: 0

4) $\left(x^2-5x+6\right)^2+\lg\left(x^2-4x+5\right)\le 0$

$\left(x^2-5x+6\right)^2\ge 0, \quad \lg\left(\left(x-2\right)^2+1\right)\ge 0$

$$\left(x^2-5x+6\right)^2+\lg\left(x^2-4x+5\right)\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ \lg\left(\left(x-2\right)^2+1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Ответ: 2

Упражнение: $\sqrt{x^2-7x+12}+\lg^2\left(x^2-4x+1\right)\le 0 \{4\},$

5) $\sqrt[8]{x^4+5x^3+64}+\arcsin^2\left(x^2+4x\right)\le 0$

$$\sqrt[8]{x^4+5x^3+64}+\arcsin^2\left(x^2+4x\right)\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+5x^3+64=0 \\ \arcsin^2\left(x^2+4x\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+5x^3+64=0 \\ x^2+4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: -4

3.

Метод мини-максов

$$\text{На}\quad \text{ОДЗ}\quad \begin{matrix} f(x)\le A(f(x)\ge A) \\ g(x)\ge A(g(x)\le A) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases}$$

Полезные неравенства:

$$1)\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab},\text{где}\quad \begin{cases} a\ge 0 \\ b\ge 0 \end{cases}\quad \text{равенство достигается}\quad \text{при } a=b$$

$$2)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ge ab,\text{где}\quad ab\ge 0\quad \text{равенство достигается}\quad \text{при } a=b$$

$$3)\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{равенство достигается}\quad \text{при } a=b$$

$$4)a+\frac{1}{a}\ge 2,\quad \text{если}\quad a>0\quad \text{равенство достигается}\quad \text{при } a=1$$

$$5)\text{Неравенство}\quad \text{Коши}\quad \frac{a_1+a_2+.....a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot....a_n},\text{где}\quad a_i\ge 0$$

$$6)\left|a\sin\varphi+b\cos\varphi\right|\le\sqrt{a^2+b^2}$$

$$7)\text{если}\quad a>0,\quad \text{то}\quad ax^2+bx+c\ge\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$\text{если}\quad a<0,\quad \text{то}\quad ax^2+bx+c\le\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$8)0<a^{|f(x)|}\le 1,\quad 0<a<1;\qquad a^{|f(x)|}\ge 1,\quad a>1$$

$$1)3+\log^4{}_{0,5}(x^2-x+1)=3\left|\cos((x-1)\cos 2x)\right|$$

$$3+\log^4{}_{0,5}(x^2-x+1)=3\left|\cos((x-1)\cos 2x)\right|\Leftrightarrow\begin{cases}3+\log^4{}_{0,5}(x^2-x+1)\ge 3\\ 3\left|\cos((x-1)\cos 2x)\right|\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log^4{}_{0,5}(x^2-x+1)=0\\ \left|\cos((x-1)\cos 2x)\right|=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}\right.\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Ответ : 1

$$2)\sqrt{9-2x^2}=3+\sin^2 3x$$

$$\sqrt{9-2x^2}\le 3,\quad 3+\sin^2 3x\ge 4$$

$$\sqrt{9-2x^2}=3+\sin^2 3x\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\sqrt{9-2x^2}=3\\ 3+\sin^2 3x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=0$$

Ответ : 0

$$3)\sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}=9x^4+8$$

$$\sqrt{25-x^2}\le 5,\quad \sqrt{9-x^2}\le 3,\quad \sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}\le 8,\quad 9x^4+8\ge 8$$

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}=9x^4+8\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}=8\\ 9x^4+8=8\end{cases}\Leftrightarrow x=0$$

Ответ : 0

$4)\sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}=9x^4+8$

$\sqrt{25-x^2}\le 5, \quad \sqrt{9-x^2}\le 3, \sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}\le 8, \quad 9x^4+8\ge 8$

$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}=9x^4+8 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{25-x^2}+\sqrt{9-x^2}=8\\ 9x^4+8=8\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Ответ : 0

$5)\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{2x^2-8x+17}=4$

$\sqrt{(x-2)^2+1}+\sqrt{2(x-2)^2+9}=4$

$(x-2)^2\ge 0, \quad (x-2)^2+1\ge 1, \quad \sqrt{(x-2)^2+1}\ge 1$

$(x-2)^2+9\ge 9, \quad \sqrt{(x-2)^2+9}\ge 3$

$\sqrt{(x-2)^2+1}+\sqrt{2(x-2)^2+9}\ge 4$

$$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{2x^2-8x+17}=4 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+1}=1\\ \sqrt{(x-2)^2+9}=3\end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Ответ : 2

$6)2\cos(3x^2-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

$f_1(x)=2\cos(3x^2-x), \quad D(f_1)=R$

$f_2(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}, \quad D(f_2)=R$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x>0 \Rightarrow f_2(x)\ge 2$

$|\cos x|\le 1, \Rightarrow f_1(x)\le 2$

$$2\cos(3x^2-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos(3x^2-x)=2\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(3x^2-x)=1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Ответ : 0

$7)|ctgx|+\frac{1}{|ctgx|}\le 2-x^2-\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{16}$

$|ctgx|+\frac{1}{|ctgx|}\ge 2$

$2-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^2\le 2$

$$|ctgx|+\frac{1}{|ctgx|}\le 2-x^2-\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{16} \Leftrightarrow \begin{cases}|ctgx|+\frac{1}{|ctgx|}=2\\ 2-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^2=2\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}$$

Ответ : $-\frac{\pi}{4}$

$8)\cos^2(x\sin x)=1+\left|\log_5(x^2-x+1)\right|$

$\cos^2(x\sin x)\le 1$

$1+\left|\log_5(x^2-x+1)\right|\ge 1$

$$\cos^2(x\sin x)=1+\left|\log_5(x^2-x+1)\right| \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2(x\sin x)=1\\ 1+\left|\log_5(x^2-x+1)\right|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Ответ : 0

$9)4x^2+4x+17=\dfrac{12}{x^2-x+1}$

$4x^2+4x+17=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+16,\quad 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+16\ge 16$

$\dfrac{12}{x^2-x+1}=\dfrac{12}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}},\quad \dfrac{12}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\le 16$

$$4x^2+4x+17=\frac{12}{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+16=16\\ \dfrac{12}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{48}{7}=16(\text{ложь})\end{cases}$$

Ответ : *нет решений*

$10)\cos^7 x+\sin^5 x=1$

$\cos^7 x-\cos^2 x=\sin^2 x-\sin^5 x$

$\cos^2 x(\cos^5 x-1)=\sin^2 x(1-\sin^3 x)$

$\cos^2 x(\cos^5 x-1)\le 0$

$\sin^2 x(1-\sin^3 x)\ge 0$

$$\cos^7 x+\sin^5 x=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 x(\cos^5 x-1)=0\\ \sin^2 x(1-\sin^3 x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=1\\ \sin x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=2\pi k\end{array}\right.$$

Ответ : $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z; 2\pi k, k\in Z$

$11)\dfrac{\cos^2 x}{\sin^8 x}+\dfrac{\sin^8 x}{\cos^2 x}=2\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}$

$\dfrac{\cos^2 x}{\sin^8 x}+\dfrac{\sin^8 x}{\cos^2 x}\ge 2$

$2\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}\le 2$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}+\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}=2\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2} \Leftrightarrow (\text{на}\quad \text{ОДЗ}) \quad \begin{cases} \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}+\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}=2 \\ 2\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}+\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}=2 \\ x=\pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

С учётом ОДЗ

Ответ: нет решений

III. Применение монотонности.

1. Если функции f(x) и g(x) являются монотонными разного смысла, то уравнение f(x) = g(x) на J может иметь не более одного решения.

То же самое выполняется, если g(x) = const.

Перед тем как решать уравнение, полезно разобрать такие свойства:

1) ↑ + ↑ = ↑ 2) ↑(↓) = ↓ 3) ↑(↑) = ↑

4) c · ↑ = ↑ c > 0

c · ↑ = ↓ c < 0

1). Решить уравнение

$\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}$

ОДЗ [1; 3]

f(x) = $\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}$ - возрастает (как сумма возрастающих на [1; 3] функций)

g(x) = 4 + $\sqrt{3-x}$ убывает на [1; 3]. Уравнение имеет не более одного корня

Испытываем целые значения из [1; 3]

Ответ:2

2. Симметричность функций

Если f(x) – монотонная, то f(h(x)) = f(g(x)) <=> h(x) = g(x)

1) $2^{x^2-3x+1}-3^{3x-x^2-1} = 4^x - 9^{-x}$

$2^{x^2-3x+1}-3^{3x-x^2-1} = 2^{2x} - 3^{-2x}$

f(x) = $2^x - 3^{-x}$

g(x) = $x^2 - 3x + 1$ f(g(x)) = f(h(x))

h(x) = 2x

f(x) – возрастающая, как сумма возрастающих . g(x) = h(x)

$$x^2 - 3x + 1 = 2x; \quad x^2 - 5x + 1 = 0; \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$2) \sqrt[6]{x+2} + \log_{117}(x+2) + 31^{\frac{x+2}{2}} > \sqrt[6]{-2x+3} + \log_{117}(-2x+3) + 31^{\frac{-2x+3}{2}}$$

$f(u) = \sqrt[6]{u} + \log_{117} u + 31^{\frac{u}{2}}$

$D(f): u > 0, \quad f(u) \quad \textit{возрастает} \quad \textit{на} \ D(f)$

$f(x+2) > f(-2x+3)$

$$\begin{cases} x+2 > -2x+3 \\ x+2 > 0 \\ -2x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 1 \\ x > -2 \\ x < 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x > -2 \\ x < 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$$

$\textit{Ответ}: (\frac{1}{3}; \frac{3}{2})$

$$3)(\sin x + 1)\left(1 + \sqrt{(\sin x + 1)^2 + 7}\right) = \left(1 + \sqrt{\cos^2 x + 7}\right)\cos x$$

$f(u) = u \cdot \left(1 + \sqrt{u^2 + 7}\right), \quad D(f) = R$

$$f'(u) = 1 + \sqrt{u^2+7} + \frac{2u^2}{\sqrt{u^2+7}}, \quad f'(u) > 0 \Rightarrow f(u) \quad \textit{возрастает} \quad \textit{на} \quad D(f)$$

$f(\sin x + 1) = f(\cos x) \Leftrightarrow \sin x + 1 = \cos x$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 1, \quad 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + x}{2}\right) = 1$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$\textit{Ответ}: x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

$$4)\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} + e^{\frac{x}{x-1}} < \sqrt[3]{x+2} + e^{x+2}$$

$f(u) = \sqrt[3]{u} + e^u, \quad f(u) \quad \textit{возрастает}$

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) < f(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} < x+2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$\textit{Ответ}: \left(-\sqrt{2}; 1\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$

$5) e^{2x+3} + 4x^3 < e^{2\ln 3 + 3} + 4\ln^3 3$

$f(u) = e^{2u+3} + 4u^3, \quad f(u) \ \textit{возрастает на} \ R$

$f(x) < f(3) \Leftrightarrow x < \ln 3$

$\textit{Ответ}: x < \ln 3$

$$2)\sqrt[6]{x+2}+\log_{117}(x+2)+31^{\frac{x+2}{2}} > \sqrt[6]{-2x+3}+\log_{117}(-2x+3)+31^{\frac{-2x+3}{2}}$$

$$f(u)=\sqrt[6]{u}+\log_{117}u+31^{\frac{u}{2}}$$

$D(f): u>0,\quad f(u)$ *возрастает на* $D(f)$

$$f(x+2)>f(-2x+3)$$

$$\begin{cases} x+2>-2x+3 \\ x+2>0 \\ -2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>1 \\ x>-2 \\ x<1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ x>-2 \\ x<1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$$

Ответ : $(\frac{1}{3};\frac{3}{2})$

$$3)(\sin x+1)\left(1+\sqrt{(\sin x+1)^2+7}\right)=\left(1+\sqrt{\cos^2 x+7}\right)\cos x$$

$$f(u)=u\cdot\left(1+\sqrt{u^2+7}\right),\quad D(f)=R$$

$f'(u)=1+\sqrt{u^2+7}+\dfrac{2u^2}{\sqrt{u^2+7}},\quad f'(u)>0\Rightarrow f(u)$ *возрастает на* $D(f)$

$$f(\sin x+1)=f(\cos x)\Leftrightarrow \sin x+1=\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=1,\quad 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}\right)=1$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=1,\quad x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

Ответ : $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$

$$4)\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}+e^{\frac{x}{x-1}}<\sqrt[3]{x+2}+e^{x+2}$$

$f(u)=\sqrt[3]{u}+e^u,\quad f(u)$ *возрастает*

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)<f(x+2)\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}<x+2 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

Ответ : $\left(-\sqrt{2};1\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

$$5)e^{2x+3}+4x^3<e^{2\ln 3+3}+4\ln^3 3$$

$f(u)=e^{2u+3}+4u^3,\quad f(u)$ *возрастает на* R

$$f(x)<f(3)\Leftrightarrow x<\ln 3$$

Ответ : $x<\ln 3$

$$2)\sqrt[6]{x+2}+\log_{117}(x+2)+31^{\frac{x+2}{2}} > \sqrt[6]{-2x+3}+\log_{117}(-2x+3)+31^{\frac{-2x+3}{2}}$$

$$f(u)=\sqrt[6]{u}+\log_{117}u+31^{\frac{u}{2}}$$

$D(f): u>0,\quad f(u)$ *возрастает на* $D(f)$

$$f(x+2)>f(-2x+3)$$

$$\begin{cases} x+2>-2x+3 \\ x+2>0 \\ -2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>1 \\ x>-2 \\ x<1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ x>-2 \\ x<1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$$

Ответ: $(\frac{1}{3};\frac{3}{2})$

$$3)(\sin x+1)\left(1+\sqrt{(\sin x+1)^2+7}\right)=\left(1+\sqrt{\cos^2 x+7}\right)\cos x$$

$$f(u)=u\cdot\left(1+\sqrt{u^2+7}\right),\quad D(f)=R$$

$f^{/}(u)=1+\sqrt{u^2+7}+\dfrac{2u^2}{\sqrt{u^2+7}},\quad f^{/}(u)>0\Rightarrow f(u)$ *возрастает на* $D(f)$

$$f(\sin x+1)=f(\cos x)\Leftrightarrow \sin x+1=\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=1,\quad 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}\right)=1$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=1,\quad x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$

$$4)\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}+e^{\frac{x}{x-1}}<\sqrt[3]{x+2}+e^{x+2}$$

$f(u)=\sqrt[3]{u}+e^u,\quad f(u)$ *возрастает*

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)<f(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}<x+2 \\ x\neq 1\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2};1\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

$$5)e^{2x+3}+4x^3<e^{2\ln 3+3}+4\ln^3 3$$

$f(u)=e^{2u+3}+4u^3,\quad f(u)$ *возрастает на* R

$$f(x)<f(3)\Leftrightarrow x<\ln 3$$

Ответ: $x<\ln 3$

$2)\sqrt[6]{x+2}+\log_{117}(x+2)+31^{\frac{x+2}{2}} > \sqrt[6]{-2x+3}+\log_{117}(-2x+3)+31^{\frac{-2x+3}{2}}$

$f(u)=\sqrt[6]{u}+\log_{117}u+31^{\frac{u}{2}}$

$D(f): u>0, \quad f(u) \quad \textit{возрастает} \quad \textit{на} \ D(f)$

$f(x+2)> f(-2x+3)$

$$\begin{cases} x+2>-2x+3 \\ x+2>0 \\ -2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>1 \\ x>-2 \\ x<1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ x>-2 \\ x<1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$$

$\textit{Ответ}: (\frac{1}{3};\frac{3}{2})$

$3)(\sin x+1)\left(1+\sqrt{(\sin x+1)^2+7}\right)=\left(1+\sqrt{\cos^2 x+7}\right)\cos x$

$f(u)=u\cdot\left(1+\sqrt{u^2+7}\right), \quad D(f)=R$

$f'(u)=1+\sqrt{u^2+7}+\dfrac{2u^2}{\sqrt{u^2+7}}, \quad f'(u)>0 \Rightarrow f(u) \quad \textit{возрастает} \quad \textit{на} \quad D(f)$

$f(\sin x+1)= f(\cos x) \Leftrightarrow \sin x+1=\cos x$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=1, \quad 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}\right)=1$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=1, \quad x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$\textit{Ответ}: x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$

$4)\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}+e^{\frac{x}{x-1}}<\sqrt[3]{x+2}+e^{x+2}$

$f(u)=\sqrt[3]{u}+e^{u}, \quad f(u) \quad \textit{возрастает}$

$$f(\frac{x}{x-1})< f(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}<x+2 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$\textit{Ответ}: \left(-\sqrt{2};1\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

$5)e^{2x+3}+4x^3<e^{2\ln 3+3}+4\ln^3 3$

$f(u)=e^{2u+3}+4u^3, \quad f(u) \ \textit{возрастает на} \ R$

$f(x)< f(3) \Leftrightarrow x<\ln 3$

$\textit{Ответ}: x<\ln 3$

$$6)\sqrt{\log_2\frac{x-1}{x}}+\lg\left(\log\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)<\sqrt{\log_2\frac{1}{x}}+\lg\left(\log_2\frac{1}{x}\right)$$

$f(u)=\sqrt{u}+\lg u,\quad D(f):u>0,\quad f(u)$ *возрастает на* $D(f)$

$$f(\log_2\frac{x-1}{x})<f(\log_2\frac{1}{x})\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2\frac{x-1}{x}<\log_2\frac{1}{x}\\ \log_2\frac{x-1}{x}>0\\ \log_2\frac{1}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$$

Ответ $:\varnothing$

Если $f(x)$ *монотонна на ОДЗ, то* $f(f(x))=x\Leftrightarrow f(x)=x$

$7)x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

$$\frac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3=2x-1.\text{Выразим } x: x=\frac{\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3+1}{2}$$

$f(t)=\frac{t^3+1}{2},\quad$ *возрастает на* R

$$x=f(t),\text{ где } t=\frac{x^3+1}{2}=f(x),\quad x=f(f(t))\Leftrightarrow x=f(x)\Leftrightarrow x=\frac{x^3+1}{2}\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Ответ $:\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};1$

$$8)\begin{cases}x^3+2x^2+2x=y\\ y^3+2y^2+2y=z\\ z^3+2z^2+2z=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=f(z)\\ z=f(y)\\ y=f(x)\end{cases}\Leftrightarrow x=f(f(f(x)))\Leftrightarrow x=f(x)\Leftrightarrow x^3+2x^2+2x=x\Leftrightarrow$$

$x^3+2x^2+x=0$

Ответ $:-1;0$

$9)x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$

$f(x)=x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4$

$D(f):x\le\frac{1}{3}$

$f(x)$ *возрастает на* $D(f)$

Подбором видим, что $x=-1$ *корень уравнения. Так как функция строго возрастает, других корней нет.*

Ответ $:-1$

IV. Применение четности.

Множество решений уравнения f(x) = 0, где f(x) – четная или нечетная функция содержит противоположные числа.

Т. е. чтобы решить такое уравнение, нужно найти положительные корни, после чего записать отрицательные или наоборот.

Причем для нечетной функции 0 будет корнем, если он входит в область определения, а для четной функции значение 0 проверяется подстановкой.

1) Решить уравнение

$$(2x + 1)\sqrt{7+(2x+1)^2} + x\sqrt{7+x^2} = 0$$

Заметим, что слагаемые “построены” одинаково

Введем функцию $f(y) = y\sqrt{y^2+7}$

Уравнение имеет вид f(2x + 1) + f(x) = 0

f(y) – нечетная функция f(-y) = -f(y)

f(2x + 1) = -f(x) = f(-x)

f(y) монотонная $f'(y) = \sqrt{y^2+7} + \dfrac{2y^2}{2\sqrt{y^2+7}} > 0$

2x + 1 = - x

$x = -\dfrac{1}{3}$

2) ||x| - 1| - |3 - |x|| = 2

$f(x) = \big||x|-1\big| - \big|3-|x|\big| = 2,$ $f(x)$ *чётная функция. Найдём положительные кор*

$$x \ge 0: |x-1| - |3-x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1 \\ 1-x-3+x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x \le 3 \\ x-1-3+x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ x-1+3-x=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x=3 \\ x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 3$$

В силу чётности функции решением будет являться объединение промежутков

Ответ: $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$

Упражнения: $\sqrt[3]{144-x^2} = \sqrt[4]{8-x} + \sqrt{x-8}$, $\sqrt{x-15} + \sqrt{12-x} = 3.$

$\sqrt{x^2-7x+12} + \lg^2(x^2-4x+1) \le 0 \{4\}$

$\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 - \mathrm{x}$, $\sqrt{x} + 3 = -\mathrm{x} - 4$, $\sqrt{3+\sqrt{x-1}} = 1$

$\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+10}=3\{\varnothing\}, |tgx|+\dfrac{1}{|tgx|}\le 2-x^2+\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{\pi^2}{16}\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

$\left|\lg\left(x^2+2x+2\right)+5\right|\le 4-2x-x^2\{-1\}, \left|\lg(x-2)\right|+1\le -\cos\pi x\{3\}$

$\left(1+\sqrt[4]{\log^4{}_2 x+2}\right)\log^2{}_2 x+\left(1+\sqrt[4]{\log^2{}_{0,5} x+2}\right)\log_{0,5} x=0, \sqrt{\log_5(x+1)}+3^{\log_5(x+1)}<\sqrt{\log_5\dfrac{2}{x}}+3^{\log_5\frac{2}{x}}$

$\sqrt{\log_2(x-3)}+10^{\log_2(x-3)}\le\sqrt{\log_2\left(x^2-3x\right)}+10^{\log_2\left(x^2-3x\right)}, x^5+x^3+1-\sqrt{10-x}=0$

$x^5+x^3-37-\sqrt{25-8x}=0$